序　言

实变函数论在许久以前就已经持久地列入综合大学和师范学院数学系的教学计划之内．这是可以理解的，因为集论与函数论为现代每一个博学的数学家的数学教育的基础．但是，若在研究理论材料的同时还掌握这门科学的方法，换句话说，学习一种理论，能够应用此理论中所讲述的方法去独立地解决问题、证明简单的定理或构造出例子，只有在这种情况下，才可能是充分有效地通晓这个基础．

可惜，在现有关于函数论的参考文献中，有大量供自己作为练习材料的书籍还是很少的．在本国的和翻译过来的文献中仅可指出几本包含有关于集论与函数论方面的一系列有趣的练习题的书——这类教科书为：И. П. 那汤松《实变函数论》，1957，П. С. 亚历山大罗夫和A. H. 柯尔莫果罗夫《实变函数论导引》，1938，И. П. 马卡罗夫《实变函数论》，1962，Г. Е. 希洛夫《数学分析特别教程》，1962，同样的书籍还有哈尔莫什《测度论》，所列举的这些书中的一些练习题已包含于现在这本选集之中．

本书所载有的许多习题和例子，具有最基础的学习使用的性质，它们适应于师范学院与综合大学数学专业学生学习实变函数论课程大纲的基础部分．但是除了基础的习题以外，选集也包含有一系列难度较大的习题；这些习题的解答需要学员具有一定的机智和数学研究的某些实际经验．这些较难的习题（或与一般题目结合的循环习题）可作为专门的讨论班或小组使用的材料，它们也可指定作为研究的课题．

现在对本书作几点说明:

a) 由于不同的教本使用不同的术语和不同的记号，作者在每一章开头给出基本定义和记号的摘要，也给出一些假定是已知的且需要根据它们去解答习题的有关定理的叙述.

б) 本书分为两部分. 集的全部理论，从一般理论(关于集的运算，一一对应与势的问题)开始，到勒伯格(Lebesgue)的测度理论结束，全部包含在第一部分内. 第二部分叙述函数理论，从有关集映射的一般问题开始，到欧氏(Euclid)空间中的勒伯格积分理论结束.

в) 集论的拓朴问题(极限点，收敛性，开集与闭集)是在任意的度量空间内来考虑的. 这些问题的有关叙述在第四章(«度量空间»)内先提出来. 然后在第五章给出要利用任意度量空间中基本拓朴概念的习题. 第六章阐述这些拓朴概念对欧氏空间内的集(特别是对直线上的集)的应用，且要使用到欧氏空间中集合特征的应用. 对于仅限于在欧氏空间中讲述集理论的那些高等学校，第四章以及第五、六章的一切带星号的习题可以略去.

最后，作者认为向提出批评意见帮助本书的陈述得到改善的同志们表示真挚的感谢是自己愉快的义务. 首先要向 M. Ф. 波克什金，И. Я. 外尔钦柯，И. П. 马卡罗夫，A. A. 弗里德蒙与本书的编辑 M. Л. 斯摩尔扬斯基表示感谢.

Ю. С. 郭　强

目 录

第一部分 集论

第二部分 函数论

第一部分

集论

第一章 集的运算

基本的定义及记号

若 a 为集[①] A 的元，则记为：$a \in A$.

若 a 非集 A 的元，则记为：$a \bar{\in} A$（或 $a \notin A$）.

不含任何元的集称为空集，用 $\varnothing$（或 Λ，或 0）来表示.

若集 A 的一切元都是集 B 的元，则称 A 包含于 B 内或 A 含于 B；也叫做 B 包含 A 或 B 含 A（记为：$A \subset B$ 或 $B \supset A$）.

若 $A \subset B$ 又 $B \subset A$，则称 A 等于 B 或 A 与 B 相等.

两个集相等记为：$A = B$.

若 $A \subset B$，则称集 A 为集 B 的子集，如果这时 A 不与 B 相等（$A \neq B$），则称 A 为集 B 的真子集.

集的运算

1. 由至少属于 A 与 B 两个集之一的一切元所组成的集称为集 A 与集 B 之和（或并），集 A 与 B 的和记为 $A \cup B$（或 $A + B$）.

由至少属于某组集 $\{A_t\}$ 中之一个集 A_t 的元所组成之集 B 称为 $\{A_t\}$ 的和（或并）. 集之和记为：$B = \bigcup_t A_t$（或 $B = \sum_t A_t$）.

2. 由既属于集 A 又属于集 B 的一切元所组成之集称为集 A 与 B 的交（或通）. 交记为：$A \cap B$（或 $A \cdot B$）.

若 A, B 两个集之交为空集，则称 A, B 两个集不相交.

---

① 或称集合.（译者注）

由同时含于某组集 $\{A_\xi\}$ 之一切集 A_ξ 的一切元组成之集 B 称为这组集 $\{A_\xi\}$ 的交(或通). 集之交记为 $B=\bigcap_\xi A_\xi$(或 $B=\prod_\xi A_\xi$).

和与交具有交换性与结合性:

$$A\cup B=B\cup A;\qquad A\cap B=B\cap A;$$

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;\qquad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

此外, 分配律是成立的:

$$A\cap\left[\bigcup_\xi B_\xi\right]=\bigcup_\xi (A\cap B_\xi); \tag{1}$$

$$A\cup\left[\bigcap_\xi B_\xi\right]=\bigcap_\xi (A\cup B_\xi). \tag{2}$$

3. 由仅属于集 A 而不属于集 B 的一切元所组成之集称为 A 与 B 两个集之差. 差记为: $A\backslash B$(或 $A-B$).

4. 集 $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ 称为 A 与 B 两个集之对称差. 集 A 与 B 的对称差记为 $A\triangle B$:

$$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A).$$

显然, $A\triangle B=B\triangle A$.

5. 集的乘积. 设 E 与 F——两个集, 一切可能的对 (x, y) (其中 $x\in E$, $y\in F$) 所组成之集称为集 E 与 F 之乘积. 集 E 与 F 之乘积记为 $E\times F$.

特别是, 若 E——Ox 轴上任何的数集, 而 F——Oy 轴上任何的数集, 则 $E\times F$ 为一切可能的数对 (x, y) 所成之集, 其中 $x\in E$, $y\in F$; 因为数对可视为 Oxy 平面上的点, 所以 $E\times F$ 可当作平面 Oxy 上这样的一切点 (x, y) 所成之集, 其中 $x\in E$, $y\in F$.

类似于两个集之乘积, 可以定义任意多个集之乘积. 特别是三个集之乘积(其中的一个集 (E) 位于 Ox 轴上, 另一个 (F) 在 Oy 轴上, 第三个 (G) 在 Oz 轴上) $E\times F\times G$, 其元为一切可能的三数组 (x, y, z) (或说是三维空间 $Oxyz$ 的点 (x, y, z) 也一样), 其中 $x\in E$, $y\in F$, $z\in G$.

6. 考虑一序列集 $E_1, E_2, \cdots$ 之乘积.

由下面的等式

$$\overline{\lim}\, E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m,$$

即 $\quad \overline{\lim} E_n=(E_1\cup E_2\cup E_3\cup\cdots)\cap(E_2\cup E_3\cup E_4\cup\cdots)\cap$

$$\cap (E_3 \cup E_4 \cup \cdots) \cap (E_4 \cup \cdots) \cap \cdots$$

所定义之集 $\overline{\lim} E_n$ 称为序列 $E_1, E_2, E_3, \cdots$ 之上极限.

7. 由下面的等式

$$\underline{\lim}\ E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m,$$

即 $$\underline{\lim} E_n = (E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap \cdots) \cup (E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap \cdots) \cup$$
$$\cup (E_3 \cap E_4 \cap \cdots) \cup (E_4 \cap \cdots) \cup \cdots$$

所定义之集 $\underline{\lim} E_n$ 称为序列 $E_1, E_2, E_3, \cdots$ 之下极限.

若在某问题中讨论到的一切集含于集 R 之内, 则集 R 称为空间.

空间 R 与含于 R 中任何的集 E 之差 $R \setminus E$ 称为集 E (对于空间 R) 的余集, 并记为 CE(或 $C_R E$, 若我们希望强调是对空间 R 来取余集), 即是说

$$CE = R \setminus E \quad (\text{或 } C_R E = R \setminus E).$$

对偶原理. 对于任意的一组集 $\{E_\xi\}$, 其中每一个 E_ξ 含于空间 R 内, 下面等式成立:

$$C\left(\bigcup_\xi E_\xi\right) = \bigcap_\xi CE_\xi; \quad C\left(\bigcap_\xi E_\xi\right) = \bigcup_\xi CE_\xi.$$

特别, 对于 A 与 B 两个集, 对偶原理写为:

$$C(A \cup B) = CA \cap CB; \quad C(A \cap B) = CA \cup CB.$$

习 题

1. 证明下列论断:

a) 从 $A \subset B$ 导出 $A \cap B = A$ 及 $A \cup B = B$;

б) 从 $A \cap B = A$ 导出 $A \subset B$;

в) 从 $A \cup B = B$ 导出 $A \subset B$.

2. 证明:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. 证明包含式:

a) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$;

б) $(B\backslash C)\backslash(B\backslash A)\subset A\backslash C$;

в) $A\backslash C\subset(A\backslash B)\cup(B\backslash C)$.

4. 证明等式:

a) $(A\backslash B)\backslash C=(A\backslash C)\backslash(B\backslash C)$;

б) $(A\backslash B)\cup(B\backslash C)\cup(C\backslash A)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C$.

5. 从 $A\backslash B=C$ 能导出 $A=B\cup C$ 吗?

6. 从 $A=B\cup C$ 能导出 $A\backslash B=C$ 吗?

7. 下列等式: a) $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\backslash C$; б) $A\cup(B\backslash C)=(A\cup B)\backslash C$; в) $(A\backslash B)\cup C=(A\cup C)\backslash B$ 是否正确?若不正确,则有怎样的包含式成立?

8. 证明包含式:

$$\bigcup_k A_k\backslash\bigcup_k B_k\subset\bigcup_k(A_k\backslash B_k).$$

举例说明在一般情形下,这里不成立等式.

9. 证明

1) $A\triangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

2) $A\triangle B=(A\cap CB)\cup(B\cap CA)$.

10. 设 A——已给集;关于另一集——X——已知 $A\triangle X=A$. 证明 $X=\varnothing$.

11. 证明等式:

a) $A\triangle(B\triangle D)=(A\triangle B)\triangle D$;

б) $A\cap(B\triangle D)=(A\cap B)\triangle(A\cap D)$;

в) $A\triangle A=\varnothing$;

г) $A\triangle\varnothing=A$.

12. 证明包含式:

$$(A\cup B)\triangle F\subset(A\triangle F)\cup(B\triangle F).$$

举例说明在一般情形下,这里不成立等式.

13. 证明等式:

a) $C(E_1\setminus E_2)=CE_1\cup E_2$;

б) $C[C(CX\cup Y)\cup(X\cup CY)]=Y\setminus X$;

в) $(A\cap B)\cup(A\cap CB)\cup(CA\cap B)=A\cup B$.

14. 利用对偶原理,简化下式:

$$C[C(X\cup Y)\cap(CX\cup CY)].$$

15. 证明

$$\underline{\lim}E_n\leqslant\overline{\lim}E_n.$$

16. 设已给集序列 $A,B,A,B,A,B,\cdots$, 即当 n 为奇数时,$E_n=A$; 当 n 为偶数时,$E_n=B$. 证明$\underline{\lim}E_n=A\cap B$; $\overline{\lim}E_n=A\cup B$.

17. 设 $\{E_n\}$——两两互不相交的集所成之序列,证明

$$\underline{\lim}E_n=\overline{\lim}E_n=\varnothing.$$

18. 证明 $\underline{\lim}\,E_n$是而且仅是同时属于已给序列中从某个下标 n 起的一切集的点所组成. 证明 $\overline{\lim}E_n$ 是而且仅是属于已给序列中无穷多个集的点所组成.

19. 证明把序列 $\{E_n\}$ 中第一个集 E_1 改变了, 无论 $\underline{\lim}E_n$ 或 $\overline{\lim}E_n$ 都不变化.

20. 若集序列单调上升: $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$或单调下降: $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$, 则其上极限等于下极限: $\underline{\lim}E_n=\overline{\lim}E_n$.

21. 证明对于任何集序列 $\{E_n\}$, 包含式成立:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\subset\underline{\lim}E_n\subset\overline{\lim}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

试举出这样一个集序列的例子, 使得包含符号中任何一个都不能改变为等式.

22. 设 $A=\underline{\lim}\,E_n$, $B=\overline{\lim}\,E_n$. 证明 $CA=\overline{\lim}\,CE_n$, 而 $CB=\underline{\lim}CE_n$.

23. 证明对于任意的集 E,F,G 下列等式成立:

а) $E\times(F\cup G)=(E\times F)\cup(E\times G)$;

б) $(F\cup G)\times E=(F\times E)\cup(G\times E)$.

24. 证明对于任意的集 E,F,G 下列等式成立:

а) $E\times(F\cap G)=(E\times F)\cap(E\times G)$;

б) $(F\cap G)\times E=(F\times E)\cap(G\times E)$.

25. 等式 $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ 正确吗?

26. 等式 $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$ 正确吗?

第二章 一一对应

若对于集 A 的每一个元 a, 按某法则使它与集 B 的一个且只有一个元 b 对应, 并且集 A 中相异的元对应集 B 中相异的元, 如果在此对应下, 集 B 的全部元都被利用了, 则说集 A 与 B 之间建立了一一对应.

例如, 在一切有理数所成之集与一切自然数所成之集之间可以建立起一一对应.

若在某个集 E 与一切自然数所成之集之间可以建立一一对应, 则说集 E 的元可用自然数来编号.

建立已知两个集之间的一一对应(即在已知的两个集之一上定义一个函数, 它把该集单值地映射到另一个已知集上)乃是本章的课题之目的.

在我们将要研究的诸集之中, 数集是特别重要的, 数集就是以实数为元的集. 我们列举几个数集的例子: 1) 一切实数的集 (数轴 $(-\infty, +\infty)$); 2) 满足不等式 $x\geqslant a$ 的一切数 x 所成之集 (射线 $[a, +\infty)$) 或满足不等式 $x>a$ 的一切数 x 所成之集(射线 $(a, +\infty)$); 类似定义射线 $(-\infty, a]$ 与射线 $(-\infty, a)$; 这里 a——已知数; 3) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切数 x 所成之集(称为闭区间 $[a, b]$), 这里 $a<b$, a, b 为已知数; 4) 满足不等式 $a<x<b$ 的一切数 x 所成之集 (开区间 (a, b)); 5) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的一切数 x 所成之集(半闭区间 $[a, b)$) 或满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的一切数 x 所成之集(半闭区间 $(a, b]$).

闭区间，开区间以及半闭区间统称为《线段》.

若存在这样的数 b，使对于一切的 $x\in E$，不等式：$x\leqslant b$ 都满足，则称数集 E 为囿于上．满足这个条件的数 b 称为数集 E 的上界．

囿于上的集，其上界不止一个，而有无穷多个相异的上界．非空且囿于上的集之最小上界称为该集的上确界．每一个囿于上的非空集有上确界，并且是惟一的．集 E 之上确界用记号 $\sup E$ 来表示．

若集 E 非囿于上，则按定义，认为：$\sup E=+\infty$.

若存在这样的数 a，使对一切 $x\in E$，都有 $x\geqslant a$，则称数集 E 为囿于下．满足这个条件的数 a 称为集 E 的下界．集 E 的最大下界称为它的下确界，并用 $\inf E$ 来表示．每一个囿于下的非空集有下确界，而且是惟一的．

若集非囿于下，则按定义，认为 $\inf E=-\infty$.

既囿于上又囿于下的集 E 称为有界集．非空的有界集之上、下确界为有限数(并且 $\inf E\leqslant\sup E$)．闭区间，开区间，半闭区间是有界数集的例子[①].

除了数集之外，我们也将研究平面上的集，即平面上的点集．例子：1）平面上一切点所成之集；2）平面上坐标满足不等式 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的一切点所成之集(闭圆)，或满足不等式 $x^2+y^2<a^2$ 的一切点所成之集(开圆)等等.

此外，我们将研究空间的集，即在三维空间内的集(例如，球面——距某定点(中心)距离相等的一切点所成之集).

在某些情况下，为了建立数集之间的一一对应，利用小数来表示集中的数是有益的.

若正数 a 可表为收敛级数之和的形式：

$$a=A+\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{p^2}+\frac{n_3}{p^3}+\frac{n_4}{p^4}+\cdots$$

其中 $p>1$——正整数，A——非负整数，而 $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots$——从 0 到 $p-1$ 的非负整数，则说数 a 分解为以 p 作基底的小数(或 p 进位小数)．这可用下面的方法来写出：

$$a=A.n_1n_2n_3n_4\cdots$$

A 称为数 a 的整数部分；$n_1, n_2, n_3, \cdots$——数 a 的 p 进位小数部分．若从某

① 除了数集的上、下确界以外，往往必须遇着(单元或多元)函数的上、下确界．若函数 $f(x)$ 定义在集 E 上，则对记号 $\sup\limits_{x\in E}f(x)$，$\inf\limits_{x\in E}f(x)$ 应理解为与集 E 中自变量 x 的一切可能的值相应的函数值所成之集的上、下确界．若 $f(x, y)$——定义在集 E 上的二元函数，记号 $\sup\limits_{(x,y)\in E}f(x,y)$，$\inf\limits_{(x,y)\in E}f(x,y)$ 有相似的意义.

个下标 k 开始的一切 n_k 都等于零，则小数称为有限的，相反的情况——无尽的.

对于给定的 $p>1$，任何正数 a 可表为 p 进位的无尽小数，并且每一个数 a 与惟一的 p 进位的无尽小数对应，反之，每一个 p 进位的无尽小数对应惟一的正数 a. 并且某些有理数（非全体！）除了可分解为无尽的 p 进位小数外，也可分解为有限的 p 进位小数；例如，当 $p=10$ 时

$$\frac{63}{100}=0.63000\cdots(\text{有限小数});\quad \frac{63}{100}=0.629999\cdots(\text{无尽小数}).$$

能被分解为有限的 p 进位小数的数称为 p 进位有理数.

一切其余的数称为 p 进位无理数.

以 $p=10$ 为基底的小数称为十进位小数；以 $p=2$ 为基底的——二进位小数；以 $p=3$ 为基底的——三进位小数，等等.

习 题

27. 建立一切自然数所成之集 N 与一切正偶数所成之集 Q 之间的一一对应.

28. 建立一切自然数所成之集 N 与一切偶数所成之集 P 之间的一一对应.

29. 建立线段 $[0,1]$ 上一切有理数所成之集 R 与一切自然数所成之集 N 之间的一一对应.

30. 建立一切正有理数所成之集与一切自然数所成之集之间的一一对应.

31. 形状为 $f(x)=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$（其中系数 $a_0,\cdots,a_n$；$b_0,\cdots,b_m$——整数）且具下述性质的函数是否存在：对于任意的有理数 r 可求得这样的整数 k，使 $f(k)=r$？

32. 求闭区间 $[0,1]$ 到闭区间 $[a,b]$ 的单值映射.

33. 求开区间 $(0,1)$ 到整个数轴上的单值映射.

34. 求数轴到开区间(a,b)的单值映射.

35. 求半闭区间$[0,1)$与半轴$[0,+\infty)$之间的一一对应.

36. 建立闭区间$[0,1]$到开区间$(0,1)$的单值映射.

37. 建立闭区间$[0,1]$到整个数轴的单值映射.

38. 求闭区间$[0,1]$与半轴$[0,+\infty)$之间的一一对应.

39. 建立半直线$[0,+\infty)$与开区间(a,b)之间的一一对应.

40. 将半直线$[0,+\infty)$单值地映射到整个数轴上.

41. 是否存在将闭区间$[a, b]$单值映射到整个数轴上的连续函数?

42. 是否存在将闭区间$[a,b]$单值映射到开区间(c,d)上的连续函数?

43. 是否存在将闭区间$[a,b]$单值映射到由两个闭区间$[0,1]$与$[3,4]$组成之集的连续函数?

44. 建立单位圆周到闭区间$[0,1]$的单值映射.

45. 建立平面上的开的单位圆与闭的单位圆的余集之间的一一对应.

注. 平面Oxy上满足不等式: $x^2+y^2<1$ 的这种点 $M(x, y)$所成之集称为开的单位圆; 满足关系式$x^2+y^2\leqslant 1$的点所成之集——闭的单位圆.

46. 建立开的单位圆与闭的单位圆之间的一一对应.

47. 求闭的单位圆与开的单位圆之余集之间的一一对应.

48. 求闭单位圆与其余集之间的一一对应.

49. 建立圆周与直线之间的一一对应.

50. 建立有一个极点的球面与平面之间的一一对应.

51. 建立全球表面与平面之间的一一对应.

52. 平面区域A, 若在从原点O引出的每一条射线上能找到异于O的这样一点M, 使线段$[O,M)$含于A内, 而射线(M,∞)不

含于A中任何一点(换言之,从点O引出的每一条射线与区域的边界仅相交于异于O的一点),称A为星形域. 若对于每条射线的点M含于A中,则星形域称为是闭的.

建立任意闭圆与任意闭星形域之间的一一对应.

53. 建立一切无理数所成之集与数轴上一切实数所成之集之间的一一对应.

54. 建立下列集之间的一一对应:

a) 开正方形$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$的点集与开矩形$a<x<b$, $c<y<d$的点集; б) 开正方形$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$的点集与平面的点集; в) 开矩形$a<x<b$, $c<y<d$的点集与平面的点集.

55. 我们把正方形$0<x\leqslant 1$, $0<y\leqslant 1$中的点M的坐标写成无尽十进位小数:横标$x=0.n_1n_2n_3\cdots$, 纵标$y=0.m_1m_2m_3\cdots$(若这些数中任何一个是十进位-有理的,即可写为两种形式的十进位小数表示.我们则选取含无穷多个9的表示式,例如0.369999…,而不取0.370000…).使正方形中的每一点$M(0.n_1n_2n_3\cdots, 0.m_1m_2m_3\cdots)$与线段$(0,1]$中横标为$0.n_1m_1n_2m_2n_3m_3\cdots$的点$P$相对应. 在此对应下,能得到线段$(0,1]$的一切点否?这个在正方形$(0,1]\times(0,1]$的点与线段$(0,1]$的点之间的对应是否为一一对应.

56. 建立线段$[0,1]$上的一切有理点所成之集与正方形$[0,1]\times[0,1]$中具有理坐标的一切点所成之集之间的一一对应.

57. 建立数轴上一切有理点所成之集与平面上两个坐标均为有理数的那些点所成之集之间的一一对应.

58. 建立具有有理系数的一切多项式所成之集与一切自然数所成之集之间的一一对应.

59. 建立自然数列的一切有限子集所成之集与一切正整数所

成之集之间的一一对应.

60. 建立一切自然数序列所成之集与自然数的一切升序列所成之集之间的一一对应.

61. 建立自然数的一切升序列所成之集与半闭区间$(0,1]$内的数相对应那一切无尽二进位小数所成的集之间的一一对应.

第三章　集　的　势

若在两个集之间能建立一一对应，则称这两个集对等.

若A与B两个集对等，则用：$A\sim B$来表示.

容易看到，若$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$.

集的对等原理（康托-弗·白恩斯坦（Contor-F. Bernstein）定理）.

а）若$A\subset B\subset C$，并且$A\sim C$，则$A\sim B$.

б）若A对等于集B的子集，而B也对等于集A的子集，则$A\sim B$.

若集E对等于满足不等式$1\leqslant n\leqslant N$（对于某个自然数N）的一切自然数所成之集，则称E为有限集.

空集我们也可算作有限集.

非有限的集称为无限集.

两个有限集当且仅当它们的元的数目相同时，这两个集对等.

对于无限集不能说关于集的元之数目；我们用元的数目之拓广的概念——集的势，作为任意集的数量上之描述；若两个集互相对等，则说它们有相同的势.

集A的势用记号$\overline{\overline{A}}$表示.

若两个集A与B有相同的势（即是说，若它们对等），则此事记为：

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}.$$

若集B对等于集A之任何的一个子集，则称集B的势不超过集A的势；这记为：$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$或$\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}}$.

若两个集不对等（即在它们之间不能建立起一一对应），则记为：$\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$

（或 $A \nsim B$）.

若两个集 A 与 B 不对等，但集 B 对等于集 A 之某一子集，则说集 A 之势大于集 B 之势. 记为: $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, 或 $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$.

由康托-白恩斯坦定理推知，若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, 但 $A \nsim B$, 则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

要证明两个集 A 与 B 对等，我们可用下面的方法进行:

1）或是直接建立集 A 与 B 之间的一一对应;

2）若这样做有困难，那就确定集 A 与集 B 之子集对等，又集 B 与集 A 之子集对等，然后应用康托-白恩斯坦第二定理.

若集 A 是有限的，且有 n 个元，则可用下之符号等式: $\overline{\overline{A}} = n$ 来表示；特别是，若 A——空集，则 $\overline{\overline{A}} = 0$.

若集 A 对等于一切自然数所成之集，则称 A 是可数集；若集 A 可数，则可用下之符号等式: $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$（读作《阿列夫一零》）来表示.

可数集的例子: 一切整数所成之集；一切有理数所成之集；具有理系数的一切多项式所成之集；一切代数数所成之集，等等.

若集的势大于自然数集的势，则称它为不可数集. 例如，线段 $[0, 1]$ 为不可数集.

对等于线段 $[0, 1]$ 的任何集称为具有连续势的集. 若集 A 有连续势，则记为: $\overline{\overline{A}} = c$.

若集有连续势，则为了简单起见，有时说它为连续统.

具有连续势的集（即与线段 $[0, 1]$ 的势相同的集）之例子: 闭区间 $[a, b]$; 开区间 (a, b)（对于任意的 a 与 b, $a<b$）；整个数轴；一切无尽十进位小数所成之集；一切无理数所成之集；任意一圆的一切点所成之集；正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$（更一般，任意的矩形）的一切点所成之集；平面上的一切点所成之集；$Oxyz$ 空间的一切点所成之集；给定在线段 $[0, 1]$ 上的一切连续函数所成之集，等等.

若已给某集 E, 则由 E 之一切子集为元之集 $\mathscr{E}$ 的势比 E 的势大:

$$\overline{\overline{\mathscr{E}}} > \overline{\overline{E}}.$$

集 $\mathscr{E}$ 称为《集 E 的一切子集所成之集》.

若 E——势为 n 的有限集，则 $\mathscr{E}$——也是有限集势为 2^n.

若 E——势为 a 的无限集，则集 $\mathscr{E}$ 的势记为: 2^a.

当 E 为可数集的情形，$\mathscr{E}$ 有连续势: $2^{\aleph_0} = c$.

若E是势为c的集，则$\mathscr{E}$的势大于连续势：$2^c>c$.

势为2^c的任何集称为超连续势的集.

超连续势的集之例子：线段$[0,1]$的一切子集所成之集；数轴的一切子集所成之集；平面的一切子集所成之集；给定在线段$[0,1]$上的一切函数(不仅是连续函数)所成之集，等等.

最后指出可数集的一些性质：

1）可数集的任何子集或是有限的，或是可数的.

2）任何无限集含有可数子集(这可用下之说法来表达：《可数集是最小的无限集》).

3）有限个或可数个可数集之和是一个可数集.

4）若给不可数集E添上或减去可数集M，则集E的势不变：

$$\overline{\overline{E \cup M}} = \overline{\overline{E}};\quad \overline{\overline{E \setminus M}} = \overline{\overline{E}}.$$

习　　题

62. 平面上顶点是有理坐标的一切三角形所成之集具有什么样的势？

63. 分子和分母皆具整系数的一切有理函数所成之集具有什么样的势？

64. 证明平面上半径为有理数且中心坐标为有理数的一切圆周所成之集是一个可数集.

65. 一切有限十进位小数所成之集具有什么样的势？对于给定的$p>1$时，一切有限p进位小数所成之集具有什么样的势？

66. 系数为代数数的一切多项式所成之集具有什么样的势？

67. 证明给定在闭区间$[a,b]$上的单调函数之间断点所成之集是有限集或可数集.

68. 证明定义在整个数轴上的单调函数之间断点所成之集是有限集或可数集.

69. 设E——正数所成之任何的非可数集；证明可找到这样

的数 $\tau>0$，使集 $E\cap(\tau,+\infty)$——非可数.

70. 下之论断：《若 E——位于半直线 $(0,\ +\infty)$ 上的数所成之无限集，则可找到这样的数 $\tau>0$，使集 $E\cap(\tau,+\infty)$——无限的》正确否？

71. 设 E——直线上的可数点集. 能否将集 E 移动一个距离 a（即将一切的点 $x\in E$ 用点 $x+a$ 去改换）使得经移动后所得之集 E_a 不与集 E 相交？

72. 设 E——圆周上的可数点集. 可否将圆周绕中心旋转某一个角 φ，使得由 E 旋转所得来的集 E_φ 不与集 E 相交？

73. 证明，若直线上的集 E 的任意二点之间的距离大于一，则集 E 是有限的或可数的.

74. 已知平面点集 E 中任意二点之间的距离大于 a（这里 a——已给正数）. 证明，集 E 至多可数（即是说，或为可数，或为有限）.

75. 一切超越数（即非代数数）所成之集具有什么样的势？

76. 自然数的一切严格单增序列所成之集具有什么样的势？

77. 自然数的一切序列所成之集具有什么样的势？

78. 不包含数字 7 的自然数序列全体所成之集具有什么样的势？

79. 含有数字 7 的一切自然数序列所成之集具有什么样的势？

80. 有理数的一切可能的序列所成之集具有什么样的势？

81. 一切可能的（具任意实系数）多项式所成之集具有什么样的势？

82. 数轴上一切闭区间所成之集具有什么样的势？

83. 直线上两两互不相交的闭区间所成之集. 此集的势可以说它是什么？

84. 平面上一切圆所成之集具有什么样的势?

85. 在平面上,两两互不相交的圆周构成之某个集,此集能否是不可数的?

86. 在平面上,两两互不相交的字母 T(这些字母的大小可以是相异的)构成之某个集. 这些字母所成的集能否是不可数的?

87. 在平面上,两两互不相交的字母 Γ 构成之某个集. 该集能否是不可数的?

88. 一切严格增的连续函数(给定在线段 $[a, b]$ 上)所成之集具有什么样的势?

89. 线段 $[a, b]$ 上的一切单调函数(不仅是连续的)所成之集具有什么样的势?

90. 实数所组成的一切序列所成之集具有什么样的势?

91. 介于 0 与 1 之间,而十进展开式中缺数字 7 的一切实数所成之集具有什么样的势?

92. 介于 0 与 1 之间,而十进展开式中有数字 7 的一切实数所成之集具有什么样的势?

93. 介于 0 与 1 之间,而十进展开式中数字 7 居第三位的一切实数所成之集具有什么样的势?

94. 介于 0 与 1 之间,而三进展开式中缺数字 1 的一切实数所成之集具有什么样的势?

95. 利用康托-白恩斯坦定理证明半径相同的闭圆与开圆[①]对等.

96. 利用康托-白恩斯坦定理证明边相同的闭正方形与开正方形对等.

---

① 完全位于圆内的一切点所成之集称为半径为 r 的开圆(即距圆心的距离小于 r 的点集); 若是给此集添上圆的边界上的各点就得闭圆. 《开正方形》与《闭正方形》的概念之涵义与此类似.

97. 利用康托-白恩斯坦定理证明平面与平面上的闭正方形对等.

98. 利用康托-白恩斯坦定理证明正方形 $0<x\leqslant 1$, $0<y\leqslant 1$ 与线段 $(0,1]$ 对等(利用 55 题的结果).

99. 设 A 与 B ——两个对等的无限集. 是否存在 A 的子集(异于 A)对等于集 B?

100. 证明, 若 $A\setminus B\sim B\setminus A$, 则 $A\sim B$.

101. 证明, 若 $A\subset B$ 且 $A\sim A\cup C$, 则 $B\sim B\cup C$.

102. 下之论断: «若 $A\sim C$, $B\sim D$, 并且 $A\supset B$, $C\supset D$, 则 $A\setminus B\sim C\setminus D$» 正确与否?

103. 下之论断: «若 $A\sim B$, $C\supset A$, $C\supset B$, 则 $C\setminus A\sim C\setminus B$» 正确否?

104. 下之论断: «若 $A\sim B$, $A\supset C$, $B\supset C$, 则 $A\setminus C\sim B\setminus C$» 正确否?

105. 证明在 $[a,b]$ 上均匀收敛的所有连续函数序列所成之集具有连续势.

106. 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数序列的全体所成之集具有什么样的势?

107. 证明下面的断言: «设 E 为平面上的不可数的集, 则可找到圆心在坐标原点的这样一个圆, 它含有 E 中之点的不可数集».

108. 证明可数集的一切有限子集所成之集可数.

109. 若集 E 具有连续势, 则 E 之一切有限与可数子集所成之集具有什么样的势?

110. 定义在闭区间 $[a,b]$ 上且在此区间上即使有一点不连续的一切函数所成之集具有什么样的势?

第四章　度量空间

对于集 E 中每一对元 x 与 y，使非负数 $\rho(x, y)$（«x 与 y 之间的距离»）与之对应，若 $\rho(x, y)$ 满足下列条件：

1）当且仅当 $x=y$ 时，$\rho(x, y)=0$（«恒等公理»），

2）$\rho(x, y)=\rho(y, x)$（«对称公理»），

3）对于任意的 $x\in E, y\in E,\ z\in E,\ \rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$（«三角形公理»）.

这时称集 E 为度量空间.

这些条件称为«度量空间的公理».

度量空间的例子.

1）**数轴**. 这里把数：

$$\rho(x, y)=|x-y|$$

当作 x 与 y 两个元之间的距离.

2）**n-维欧氏（Euclid）空间** H_n. 我们考虑 n 个实数的所有可能的有序数组 $x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所成之集. 此集的每一个元 x 称为点，而数 $x_1,\ x_2, \cdots, x_n$——此点之坐标. 用 H_n 来表示这个集. 为了使集 H_n 成为度量空间，用公式

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \tag{1}$$

规定其中两点 $x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 之间的距离. 采用公式(1)规定了距离的集合 H_n 称为 n-维欧氏空间.

容易看出，数轴为欧氏空间（当 $n=1$）的特殊情形.

3）**空间** $C[a, b]$——在 $[a,\ b]$ 上连续的一切函数所成之集，在此空间中两个函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 之间的距离按下之公式来确定：

$$\rho(\varphi, \psi)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)-\psi(t)|.$$

为了检验这个或那个集（于其中规定了距离 $Q(x, y)$）为度量空间，必须证明它满足度量空间的三个公理. 特别是，为了证明 H_n 为度量空间，必须利用柯西-布尼雅考夫斯基（Cauchy-Буняковский）不等式，它是对于任意

的有限数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有关系式:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

成立。

习　题

111. 证明在闭区间$[a, b]$上有界的(不仅是连续的)一切函数所成之集，若采用数

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

作为该集的两个元 $\varphi(t)$与 $\psi(t)$之间的距离，则形成度量空间.

112. 证明对于能使级数$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$收敛的一切无穷数列$x(a_1, a_2, a_3, \cdots)$所成之集，若采用数 $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|$ 作为两个数列$x(a_1, a_2, a_3, \cdots)$与$y(b_1, b_2, b_2, \cdots)$之间的距离，则形成度量空间.

113. 证明一切由实数组成的有界无限序列所成之集，若采取数

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leqslant i < +\infty} |a_i - b_i|$$

作为两个序列$x(a_1, a_2, a_3, \cdots)$与 $y(b_1, b_2, b_3, \cdots)$之间的距离，则形成度量空间.

114. 已知由具有下述性质的一切数列$x(a_1, a_2, a_3, \cdots)$所成之集：它的各项之平方和$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$收敛. 证明，若把数

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}$$

理解为两个序列$x(a_1, a_2, a_3, \cdots)$与 $y(b_1, b_2, b_3, \cdots)$之间的距离，则

形成度量空间.

115. 证明，对于在$[a,b]$上的一切连续函数所成之集，若把数

$$\rho(\varphi,\psi)=\int_a^b|\varphi(x)-\psi(x)|dx$$

理解为该集的两个元φ与ψ之间的距离，则形成度量空间.
这个空间我们将记为$C_1[a,b]$.

116. 对于一切实数所成之集，若把数

$$\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$$

理解为二数x与y之间的距离时，该集是否为度量空间？

117. 对于一切实数所成之集，若采用数：

$$\rho(x,y)=|\operatorname{arctg}(x-y)|$$

作为二数x与y之间的距离时，该集是否为度量空间？

118. 对于一切实数所成之集，若把此集中元素之间的距离定义为：$\rho(x,y)=\sqrt{|y-x|}$时，该集是否为度量空间？

119. 对于平面上的点集，若用公式

$$\rho(M_1,M_2)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$$

来定义平面上二点$M_1(x_1,y_1)$与$M_2(x_2,y_2)$之间的距离时，该集是否为度量空间？

120. 设E——圆周C上一切点所成之集；对于任意二点$x\in E$, $y\in E$，我们取C上连结此二点x, y之最短弧的长作为x与y之间的距离，则E是否成为度量空间？

121. 设E——圆周C上一切点所成之集. 在C上固定一点M_0，并用下面的方法来定义此圆周上二点之间的距离$\rho(M,N)$：若$M\neq M_0, N\neq M_0$，则$\rho(M, N)$等于圆周上连结点M与N且不经过点M_0的那一段弧之长；若$M=M_0$或$N=M_0$，则$\rho(M,N)$等于连结点M与N的最短弧之长；若$M=N$，则$\rho(M,N)=0$. 集E是否成为度量空间？

122. 给定在闭区间$[a,b]$上的一切连续函数所成之集，若用公式

$$\rho(\varphi,\psi)=\sqrt{\int_a^b(\varphi(x)-\psi(x))^2dx}$$

来定义任意两个函数$\varphi(x)$与$\psi(x)$之间的距离，则该集是否为度量空间?

提示. 首先推出积分形式的柯西-布尼雅考夫斯基不等式:

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx\leqslant\sqrt{\int_a^b[\varphi(x)]^2dx}\cdot\sqrt{\int_a^b[\psi(x)]^2dx};$$

它可以从对有限和的柯西-布尼雅考夫斯基不等式利用极限过程而得到(参阅本章的引言).

123. 平面上不经过坐标原点的一切直线所成之集，若二直线

l_1: $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$;　　l_2: $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$

之间的距离，用公式

$$\rho(l_1,l_2)=\sqrt{(p_2-p_1)^2+4\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}$$

来定义. 则该集是否为度量空间?

注. 这里的直线方程是写成所谓《法线式》$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$; 若把任意直线方程$Ax+By+C=0$的左端除以$\pm\sqrt{A^2+B^2}$就可化成法线式方程(根式前符号的选取与$C$的符号相反).

124. 平面上不经过坐标原点的一切直线所成之集，若二直线

l_1: $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$;　　l_2: $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$

之间的距离，用公式:

$$\rho(l_1,l_2)=|p_2-p_1|+|\cos\alpha_2-\cos\alpha_1|+|\sin\alpha_2-\sin\alpha_1|$$

来定义，则该集是否为度量空间?

125. 平面上一切直线所成之集，若二直线

l_1: $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$;　　l_2: $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$

之间的距离，用公式:

$$\rho(l_1, l_2) = |p_2 - p_1| + |\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1|$$

来定义，该集是否为度量空间？

126. 平面上一切直线 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$（其中 $0 \leqslant \alpha < \pi$）所成之集，若二直线之间的距离如上题那样来定义，该集是否为度量空间？

127. 设 R —— 具有已给距离 $\rho(x, y)$ 的任何度量空间；设 E —— 此空间之任何子集. E 也是度量空间吗（距离的定义与 R 相同）？

128. 设 R —— 具有已给距离 $\rho(x, y)$ 的任何的集；设某集 $E \subset R$ 在相同的距离定义下为度量空间（即是说，在其中度量空间的所有公理都满足）. 可否断言，整个集 R 也为度量空间，即 $\rho(x, y)$ 在 R 中满足度量空间的所有公理？

129. 设 R —— 任何的度量空间，且 $\mathscr{E}$ —— 它的一切有界① 非空子集所成之集族. 定义 $\mathscr{E}$ 中两个元之间的距离（即空间 R 的两个非空有界子集 E_1 与 E_2 之间的距离）如下：距离 $\rho(E_1, E_2)$ 指的是

$$\sup_{x \in E_1}[\inf_{y \in E_2} \rho(x, y)] \text{ 与 } \sup_{y \in E_2}[\inf_{x \in E_1} \rho(x, y)]$$

两数中之最小者，$\mathscr{E}$ 为度量空间吗？若不是，则在 $\mathscr{E}$ 中度量空间的哪些公理满足？

130. 设 Φ 为度量空间 R 的一切有界非空闭集② 的总体，若集族 Φ 中两个元之间（即两个有界非空闭集之间）的距离像 129 题那样定义，问 Φ 为度量空间吗？

131. 度量空间 R 的一切非空子集的集族. 若两个子集 $E_1 \subset R$ 与 $E_2 \subset R$ 之间的距离依公式

---

① 度量空间中有界集的定义参看 32 页（也参看 33 页的第一个脚注）.

② 闭集的定义参看第 5 章引言.

$$\rho(E_1, E_2)=\inf_{\substack{x\in E_1\\ y\in E_2}}\rho(x, y)$$

来定义时，此集族为度量空间吗?

第五章　集的极限点与内点·开集与闭集

我们现在研究任何的度量空间 R(特别是，欧氏空间或数轴)．为了语言的简洁称此空间的元为点．

邻域．空间R中满足条件：$\rho(x, x_0)<\varepsilon$ 的一切点所成之集称为点 $x_0\in R$ 的邻域（或 ε-邻域)．这时数 $\varepsilon>0$ 称为邻域的半径．点 x_0 的 $\varepsilon>0$ 邻域记为：$V_\varepsilon(x_0)$．

若基本空间R为数轴，则点 x_0 的 ε 邻域为开区间 $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$．若 R——平面，则 $V_\varepsilon(x_0)$——中心在点 x_0，半径为 ε 的开圆．若 R——三维欧氏空间，则 $V_\varepsilon(x_0)$——中心在点 x_0，半径为 ε 的球，等等．

邻域的基本性质：若 $y\in V_\varepsilon(x_0)$，则可找到这样的数 $\delta>0$，使 $V_\delta(y)\subset V_\varepsilon(x_0)$．

极限点．设 E——含于R内之任何的集．若点 $x_0\in R$ 的任何邻域内至少含有E中异于 x_0 的一点，则点 x_0 称为集E的极限点(注意，极限点不必属于集E自己)．

点 x_0 为集E之极限点的必要而且充分的条件是：在点 x_0 的任何邻域内存在有E中的无穷多个点．

集E的一切极限点所成之集称为它的导集，并记为 E'．

导集的一切极限点所成之集称为集E的第二级的导集，并记为 E''．更高级的导集可以类似地来定义．

孤立点．若点 $x_0\in E$ 有一邻域不包含集E的任何一点(除点 x_0 而外)，则点 x_0 称为集E的孤立点．

边界点．若点 x_0 的任何邻域内既有属于集E的点，又有不属于集E的点，则称点 x_0 为集E的边界点．

注意，边界点可以是集E的元，也可以不是它的元．

边界点的例子. 1) 闭圆A的边界圆周上的一切点都是边界点, 它们都属于A. 2) 开圆B的边界点也是边界圆周上的一切点; 这些点中无任何一点属于B. 3) 平面上任何集的一切孤立点都是边界点 (但是, 其逆自然不真).

集合E的一切边界点所成之集称为该集的边界. 集E的边界记为«borne E».

接触点. 若点x_0的任何邻域内至少有集E中的一点, 则称点x_0为集E的接触点.

容易看出, 集E的一切极限点为该集的接触点, 而该集本身的一切点(甚至非极限点)也是其接触点.

闭包. 集E的一切接触点所成之集称为集E的闭包(且记为$\bar{E}$).

显然, 若给集E添上它的一切极限点就得到集之闭包: $\bar{E}=E\cup E'$.

我们指出, 两个集之和的闭包等于它们的闭包之和:

$$\overline{E_1\cup E_2}=\bar{E}_1\cup\bar{E}_2.$$

但此结论不能推广到无穷多个集之和的情形.

闭集. 若集E包含它自己的一切极限点在内(即$E'\subset E$), 则称集E为闭集.

特别是, 任何有限集为闭集(因为在这种情形导集是空集). 空集为有限集的特殊情形, 故空集是闭集. 此外, 全空间R是闭集.

闭集的另一些例子: 直线上的闭区间$[a, b]$; 数轴上的一切自然数所成之集; 平面上的闭圆(即带有边界圆周的圆); 平面上的闭正方形, 等等.

与此同时, 例如, 开区间(a, b); 直线上一切有理数所成之集; 平面上的开圆——皆非闭集.

应当指出, 任意集E的闭包$\bar{E}$恒为闭集.

集E为闭集的必要充分条件是: 它包含其自己的一切接触点.

若集E被包含于自己的导集之中($E\subset E'$), 则它不含孤立点.

若$E=E'$, 即是说, 若集E是闭的且不含孤立点, 则称它为完备集.

直线上的完备集的例子: 闭区间$[a, b]$; 整个数轴; 康托完备集.

康托集. 康托集是用下面的方法作出来的: 从闭区间$[0, 1]$内去掉开区间$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; 然后从剩下的两个闭区间内分别去掉长为$\frac{1}{3^2}$, 而中心在这两个闭区间的中点的二个开区间; 然后再从剩下的四个闭区间内分别去掉长为

$\frac{1}{3^3}$, 而中心在这些闭区间中点的四个开区间, 等等. 去掉了所指出的那一切开区间之后, 剩下来的集 D 是一个完备集, 称它为**康托完备集**. 它的点分为两类: 第 1 类点——去掉了的那些开区间之端点(这些点成一可数集)以及第 2 类的点(集 D 中一切其余的点; 它们成为一个势为 c 的集).

集 D 有以下的算术结构: 它是由而且仅由线段[0, 1]的点所组成, 这些点可以表为不出现数字 1 的三进位小数.

闭集具有下列的性质: 1) 有限个闭集之和是闭集; 2) 任意多个(不仅是有限个)闭集之交是闭集.

应当指出, 无穷多个闭集之和不一定是闭集.

可表示成可数个闭集之和的任意集称为 F_σ (读作《艾伏-西格玛》)型的集. 例如, 任何的闭集是一个 F_σ 型的集; 任何可数点集(特别是, 直线上的有理点所成之集) 是 F_σ 型的集; 开区间(a, b)(在直线上)——F_σ 型的集; 等等.

内点. 若点 $x_0 \in E$ 不仅是它自己, 而且它的某个邻域也包含于 E 内:

$$V_\delta(x_0) \subset E.$$

则称点 x_0 为集 E 的内点.

开集. 集的一切点均为内点的集称为开集.

直线上开集的例子: 开区间(a, b); 任意多个开区间之和; 全直线.

平面上开集的例子: 圆的内部(即无边界圆周的整个圆); 正方形的内部; 全平面.

三维欧氏空间内开集的例子: 开球(即无包围它的球面的球体); 任意多个开球之和; 全空间.

应当指出, 直线上为开的集, 在平面上来说可能不再是开的. 例如, 开区间(a, b)在直线上为开集, 在平面上就不是开集.

空集在任何空间内都为开集; 此外, 空间自身也是开集.

开集的性质: 1) 有限个开集的交是开集; 2) 任意多个(不仅是有限个)开集之和是开集.

应当指出, 无穷多个开集之交未必是开集.

可表为可数个开集之交的任何集称为 G_δ (读作: 《际-德尔打》)型的集.

例如, 任何开集是 G_δ 型的集; 直线上一切无理点所成之集是 G_δ 型的集. 下面的定理成立: 任何闭集是 G_δ 型的集.

此外，我们指出，每一个开集是 F_σ 型的集.

在开集与闭集之间存在着以下的关系：1）任何开集的余集[①]是闭集；2）任何闭集的余集是开集.

集的内域. 设 A——任意的集. 它的一切内点所成之集称为集 A 的内域（记为 $\mathring{A}$）.

点到集的距离. 当 $y\in A$ 在集 A 中取遍时，数 $\rho(x, y)$ 所成之集的下确界称为点 x 到集 A 的距离：

$$\rho(x, A)=\inf_{y\in A}\rho(x, y).$$

若 $\rho(x, A)=0$，则 x——集 A 之接触点.

若 A——闭集，则当而且仅当 $x\in A$ 时，$\rho(x, A)=0$.

集与集之间的距离. 点 $x\in A$ 与 $y\in B$ 之间的距离之下确界称为集 A 与集 B 之间的距离：

$$\rho(A, B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\rho(x, y).$$

若集 A 与集 B 即使仅有一个公共点，则 $\rho(A, B)=0$；但是，反之不真：可能出现，虽然 $A\cap B=\varnothing$，$\rho(A, B)=0$.

闭集的可分离性. 对于任何两个不相交的闭集 F_1 与 F_2（$F_1\cap F_2=\varnothing$），恒有两个不相交的开集 G_1 与 G_2 分别包含 F_1 与 F_2（即 $G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$，$G_1\cap G_2=\varnothing$）.

这个事实可用话来表达：二不相交的闭集能被不相交的开集所分离.

稠密集与无处稠密集. 若集 E 的闭包包含集 A（即 $\bar{E}\supset A$），则称集 E 在集 A 中稠密. 特别是，若集 E 在空间 R 中稠密，则称它在 R 中《处处稠密》.

设 E 表直线上的点集，若任何开区间中都含有与集 E 的点完全无关的开区间，则称集 E 在直线上无处稠密.

设 E 表平面上的点集，若任何开圆中含有与集 E 的点完全无关的开圆，则称集 E 在平面上无处稠密.

类似地，可定义在任何空间中无处稠密的集.

例子. 1）直线上的有理点集，无理点集——在直线上处处稠密.

2）康托集在直线上无处稠密.

3）直线，线段，圆周——平面上的无处稠密集.

---

① 这里和今后处处所指的都是对于全空间的余集.

习　　题

132. 已给某一平面点集 E. 已知此集的所有相异两点间的距离的下确界是正的. 证明集 E 没有极限点。

133. 作一个集,使它的第一级的导集非空，而第二级的导集是空集.

134. 作一个集,使它的第 $n-1$ 级的导集非空,而第 n 级的导集是空集.

135. E——$0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}+\frac{1}{q}$ 这样形状的数所成之集，这里 n 与 q 取遍一切可能的自然数. E 是否为闭集?它的导集是什么样? 它的第二级与第三级的导集是什么样?

136. 作一个具有下列性质的可数集 E:

a) 导集 E' 具有连续势;

б) $E \cap E' = \varnothing$.

137. 证明任意集的导集是闭集.

138. 证明对于任意的集 E, 下之包含式成立:

$E' \supset E'' \supset E''' \supset \cdots \supset E^{(n)} \supset \cdots$, 这里 $E^{(n)}$——第 n 级的导集.

139. 证明 A 与 B 两个集之和的导集等于它们各自的导集之和. 举例表明此定理对于无穷多个集之和是不真的.

140. 下之论断:《两个集的交 $A \cap B$ 之导集等于每一个集的导集之交》正确否?

141. 仅由孤立点所组成之集能否有极限点? 它的导集能否为无限集? 它能否是不可数集?

142. 作这样的一个集 E, 使其一切的导集 $E', E'', \cdots, E^{(n)}, \cdots$ 彼此互异，而这些导集的交 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ 是空集.

143. 作这样的一个集 E, 使其一切的导集 $E', E'', \cdots, E^{(n)}, \cdots$ 彼此互异, 而它们的交 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ 非空集.

144. a) 举出完全没有边界点的平面点集的例子. б) 举出平面点集有边界点, 但这一切边界点不属于此集的例子; в) 举出平面点集包含其一部分边界点的例子; г) 举出仅由边界点组成的不可数平面点集的例子; д) 在直线上举出同样的例子.

145. 证明: 若极限点不属于集, 则它是集的边界点.

146. 证明有限个集之和的边界被包含于这些集的边界之和内. 举例表明, 对于无穷多个集之和的情形结论不真.

147. 证明两个集之和的闭包等于它们的闭包之和. 证明对于无穷多个集的情形, 包含式 $\bigcup_i \overline{A}_i \subset \overline{\bigcup_i A_i}$ 恒成立, 但非恒有等式成立.

148. 直接证明(不用对偶原理)有限个闭集之和为闭集.

149. 直接证明(不用对偶原理)任意多个闭集之交为闭集.

150. 证明任意集的闭包是一个闭集.

151. 已给半径为 $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ 的同心圆周的序列. 它们的并是否为闭集?

152. 已给半径为 $r_1 > r_2 > \cdots > r_n > \cdots$ 的同心圆周序列, 它们的并是否为闭集? 并的闭包是什么?

153. 已给半径为 $r_1 < r_2 < \cdots < r_n \cdots$ 的同心闭圆序列; 它们的并为闭集吗? 在平面上它是开集吗?

154. 在平面上, 双曲螺线 $\rho = \frac{a}{\varphi}$ 为完备集吗? 此螺线的闭包为完备集吗?

155. 我们假定地球是理想地光滑的球. 考虑在地球表面上具有下述性质的那一切点 M 所成之集 E: 若从 M 往北前走7公里, 然后

往西前走7公里，最后，往南前走7公里，则重新出现在点M. 集E为闭集吗？若不是，则其闭包是什么样的集？导集是什么样的集？

156. 设函数$f(x)$为在数轴Ox上处处有定义的连续函数. 证明，Ox轴上满足$f(x)\geqslant a$的那些点所成之集E_a为闭集.

157*. 证明在$[0, 1]$上满足不等式$A\leqslant f(x)\leqslant B$（这里$A<B$——已知数）的一切连续函数所成之集$E$是在$C[0, 1]$空间中的闭集.

158*. 设$F(x)$——在$[0, 1]$上的确定的连续函数；证明在$[0, 1]$上连续且满足不等式$f(x)\leqslant F(x)$的一切连续函数$f(x)$所成之集在$C[0,1]$空间中为闭集.

159. 两个完备集的交是否恒为完备集？

160. 有限个完备集的和恒为完备集吗？可数个完备集的和呢？

161. 作一个由闭集组成的可数序列，而其和不为闭集.

162. 证明任意集的一切边界点所成之集为闭集.

163. 证明任意集的内域是开集.

164. 证明对于任意的集A，由满足不等式$\rho(x, A)<\varepsilon$的一切点x所成之集E为开集（这里$\varepsilon>0$——固定的数）.

165. 下之论断：«若E——闭集，则E之内域的闭包与E相同（即是说$E=\overline{\mathring{E}}$）»正确否？若此断言不真，则包含式$E\supset\overline{\mathring{E}}$，$E\subset\overline{\mathring{E}}$中有一个成立吗？哪一个就是？

166. 下之论断：«若E为开集，则E之闭包的内域与E相同（即是说$E=\mathring{\overline{E}}$）»正确否？若此断言不真，则包含式：$E\supset\mathring{\overline{E}}$，$E\subset\mathring{\overline{E}}$中有一个成立吗？哪一个就是？

167. 设$f(x)$是在轴Ox上处处有定义的连续函数. 证明轴Ox上使$f(x)>a$的那一切点所成之集E_a为开集（在直线Ox上）.

168*. 证明在$[0, 1]$上连续且满足不等式$A<f(x)<B$（这里

$A<B$——已知数)的一切函数 $f(x)$ 所成之集 E 为 $C[0,1]$ 空间内的开集.

169*. 设 $F(x)$——$[0,1]$ 上的固定的连续函数. 证明, 满足不等式 $f(x)>F(x)$ 的一切函数 $f(x)$ 所成之集为 $C[0,1]$ 空间内的开集.

170. 作一个由开集组成的可数序列, 而其交不为开集.

171. 证明数轴上一切无理点所成之集为 G_δ 型的集.

172. 证明集 E 之闭包 $\bar{E}$ 的下列两种定义的等价性:

a) $\bar{E}=E\cup E'$;

б) $\bar{E}$——包含 E 的一切闭集之公共部分.

173. 证明集 E 之内域 $\overset{\circ}{E}$ 的下列两种定义的等价性:

a) $\overset{\circ}{E}$——集 E 之一切内点所成之集;

б) $\overset{\circ}{E}$——包含于 E 内之一切开集之和.

174. 证明, 若 $f(x)$——在 $[a,b]$ 上连续, 则和集

$$E_1\cup E_3\cup E_5\cup\cdots\cup E_{2k-1}\cup\cdots$$

为闭集; 这里 E_n——闭区间 $[a, b]$ 上满足 $n\leqslant f(x)\leqslant n+1$ 的那些点所成之集.

175. 举例表明, 若在上题中把闭区间 $[a,b]$ 改为开区间 (a,b), 则结论不真.

176. 证明可数个 G_δ 型的集之交为 G_δ 型的集.

177. 证明有限个 G_δ 型的集之和为 G_δ 型的集.

178. 证明可数个 F_σ 型的集之和为 F_σ 型的集.

179. 证明有限个 F_σ 型的集之交为 F_σ 型的集.

180. 设 $\{E_n\}$——闭集所成之序列; 证明 $\underline{\lim}\, E_n$ 是 F_σ 型的集. 对于上极限陈述并证明类似的定理.

181. 证明形状为 $\ln(r^2+1)$ 的一切点所成之集在半直线 $[0,+\infty)$ 上为稠密集(这里 r——一切的有理数).

182. 证明形状为 $\sin r$ 的一切点所成之集在闭区间$[-1, 1]$上为稠密集(这里 r——一切的有理数).

183. 证明形状为 r^3 的一切数所成之集在数轴上为处处稠密集(这里 r——一切的有理数).

184. 求形状为$\frac{p^2}{q^2}$的一切点所成之集的闭包，这里 p 与 q——一切的整数($q\neq0$).

185. 求形状为$2^{\frac{p}{q}}$的一切点所成之集的闭包，这里 p 与 q——一切的自然数.

186. 求形状为$\frac{q^2}{4p^2+q^2}$的一切点所成之集的闭包，这里 p 与 q——异于零的一切整数.

187. 设 $f(x)$——在$[a, b]$上为连续的增函数；设 E——在$[a,b]$上稠密的集.证明，形状为 $f(\xi)$的点所成之集在线段$[f(a), f(b)]$上稠密，这里 $\xi\in E$.

188. 设 E 为在直线上具有下述性质的集，对于任意二点 $x_1\in E$ 与 $x_2\in E$ (这里 $x_1<x_2$) 存在点 $x_3\in E$ 合条件 $x_1<x_3<x_2$. 设 $a=\inf E, b=\sup E$. 可否断定集 E 在$[a, b]$上处处稠密？具有所说的性质的集能否在$[a,b]$上无处稠密？

189. 作出一个可数的集族，其中之元为两两互不相交的可数集，且每一个集皆在直线上处处稠密.

190. 设 ξ——无理数. 证明形状为 $m+n\xi$ 的一切数所成之集在直线上处处稠密(其中 m 与 n——一切的整数).

191. 设ξ——无理数. 形状为 $m+n\xi$ 的一切数所成之集，在直线上是否处处稠密(其中 m 与 n——一切的偶数)？

192. 证明由位于以原点为中心的单位圆周 Γ 上且极角为 1, 2, …, n, …的点所成之集 M 在 Γ 上为处处稠密.

193. 证明具有理坐标的一切点所成之集在平面上处处稠密.

194*. 证明一切多项式所成之集在 $C[0,1]$ 空间内处处稠密.

提示. 利用维尔斯特拉斯(Weierstrass)关于用多项式逼近闭区间上连续函数的定理(参阅第 9 章引言中的定理 1).

195*. 证明具有理系数的一切多项式所成之集在 $C[0,1]$空间内处处稠密.

196. 证明康托集 D 在数轴上无处稠密.

197*. 证明一切函数——常数 $y\equiv a$, [$a\in D$(D——康托集)]所成之集 E 在 $C[0,1]$空间内无处稠密.

198*. 证明形状为 $y=nx^2$(n——整数)的一切函数所成之集在 $C[0,1]$空间内无处稠密.

199. 用下面的方法在闭区间$[0,1]$上作集 E: 已给正数的降序列 $a_1>a_2>\cdots$合$\sum_{i=1}^{\infty}a_i=A<1$. 从$[0,1]$中去掉中心在闭区间中点,而长为 a_1 的开区间;其次, 从剩下的两个闭区间中去掉中心在这些闭区间中点,而长为$\frac{a_2}{2}$的开区间;再其次, 从剩下的四个闭区间中去掉中心在这些闭区间中点, 而长为$\frac{a_3}{2^2}$的开区间,等等;在如此作可数多次之后, 剩下的集记为 E. 证明 E 在$[0, 1]$上无处稠密.

200. 证明,在线段$[0,1]$上的点,其十进位小数表示式中无数字4 和 5 的这些点所组成之集 E 为无处稠密的点集.

201. 由而且仅由在十进位小数表示式中无 2 和 6 这两个数字连续并排在一起(按这里所示之顺序)的这一切点所成之集是否在直线上为无处稠密?

202. 闭区间$[0,1]$上在十进位小数表示式中缺数字 5 的这些无理数所成之集 E 是否为闭集? 若不是, 则其闭包是什么? 该集

含孤立点否？它是否无处稠密？

203. 设 A——在直线上无处稠密的集. 证明它的闭包也是无处稠密的集.

204. 设 A——在直线上无处稠密的集. 证明它的余集 CA 在直线上处处稠密. 逆命题:《直线上处处稠密集的余集为无处稠密的集》是否成立？

205. 下述定理:《在直线上处处稠密的开集之余集为无处稠密的集》是否正确？

206. 证明定理:《闭集在直线上为无处稠密的必要充分条件是:直线上任何开区间内至少能找到一点不属于此集》.

207. 对于在平面上的集来叙述习题203—206, 并解这些习题.

208. 证明在空间 R (例如数轴) 内有限个无处稠密的集 E_1, $E_2, \cdots, E_n$ 之和集 F 在 R 中无处稠密. 此结论对于可数个无处稠密的集之和是否仍然成立？

第六章　开集与闭集(续)

在第5章引言中所述集合的性质对于在任何度量空间(因此, 欧氏空间也包括在内)中的开集与闭集都成立. 下面将要研究的集之性质使用了欧氏空间的特殊性质: 对于欧氏空间的集为真的这些性质, 一般说来, 对于任意空间中的集不再是正确的了.

在欧氏空间内的集的性质. 空间 R 中的集 E, 若从固定的点(例如, 从原点)到集 E 的任何点的距离都不超过某一个数, 则称集 E 在空间 R 中是有界的.

有界集 E 中点与点之间的所有距离之上确界称为集 E 的直径:

$$\operatorname{diam}E=\sup_{\substack{x\in E\\ y\in E}}\rho(x,y)$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 为空间 R 的元所成之序列；设 $a\in R$ 若对于任给的 $\varepsilon>0$，存在有这样的数 N（依赖于 ε），使对于一切的数 $n>N$，有不等式

$$\rho(x_n, a)<\varepsilon.$$

成立，则称上述序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 收敛于元 $a\in R$.

若序列收敛于元 a，则称 a 为序列的极限[①]，记为：$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

任何收敛序列皆有界（这意味着它的元所成之集有界）．但非任何有界序列皆收敛．在欧氏空间中，序列收敛的必要充分条件如下：

柯西（Cauchy）准则[②]．欧氏空间中的点列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots \tag{1}$$

收敛的必要充分条件：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在有这样的数 N，使对于一切的 $n>N$, $m>N$，有 $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

除序列(1)之外，我们还要研究它的一切的子序列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

其中 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$．若序列(1)收敛，则它的任何子序列也收敛，且趋于同一个极限．但是，从序列(1)发散完全不能推出其一切子序列都发散．

如我们所知，序列的有界性还不是它收敛的充分条件．但序列的有界性则是它存在收敛子序列的充分条件．

波尔察诺-维尔斯特拉斯（Bolzano-Weierstrass）定理．若欧氏空间内的点列有界，则它至少有一收敛子序列．

由此定理得出重要的推论：欧氏空间的任何无限的有界集至少有一个极限点．

---

① 有界集的定义，它的直径的定义以及收敛子序列的定义不仅对于欧氏空间有意义，而且对于任何度量空间也有意义．

② 柯西准则不仅在欧氏空间成立，而且在某些其它空间也成立．这样的空间称为完备空间．我们给出完备空间的精确定义：

空间 R 的元素序列 $\{x_n\}$，若对任给 $\varepsilon>0$，存在这样的数 N，使对一切的 $n>N$, $m>N$，有 $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$；则称 $\{x_n\}$ 为基本序列．

易知收敛序列恒为基本序列；但逆命题则不是在任何空间都成立．

若空间 R 的元素所成之任何基本序列都收敛于此空间的某一个元素，则称空间 R 为完备空间．

康托定理. 设 A_n——欧氏空间内的非空闭集，合条件 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$，且当 $n \to \infty$ 时，A_n 之直径 $\to 0$，则存在一个而且仅有一个点属于一切的 A_n.

覆盖定理. 设已给某一个集族 $\{A_\xi\}$（例如，某些开区间的集族或某些闭区间的集族）. 若 $\bigcup_\xi A_\xi$ 包含集 E，则说集族 $\{A_\xi\}$ 为集 E 的覆盖. 同时，若集族 $\{A_\xi\}$ 含有限多个不同的集 A_ξ，则称此覆盖为有限覆盖；若集族 $\{A_\xi\}$ 是无限的，则说是无限覆盖. 特别是，若集族 $\{A_\xi\}$ 是可数的，则说是可数覆盖.

海因-波雷耳(Heine-Borel)定理. 若欧氏空间内的有界闭集 E 被某一族邻域[①]所覆盖，则从中必可选出有限个邻域也同样覆盖了集 E.

这可简述为：《从有界闭集的以开邻域作成之任何覆盖中可选出该集的有限覆盖》.

欧氏空间中闭集之间的距离. 若 A 与 B 为欧氏空间内的有界闭集，则在集 A 内可找到一点 a，在集 B 内——一点 b，使得 $\rho(a,b)=\rho(A, B)$.（关于这两个点 a 与 b，则说在它们那里显现了集与集之间的距离.

由此推知，若两个有界闭集之间的距离等于零，则它们至少应当有一公共点.

这些定理当闭集中的一个有界，而另一个无界的情况仍然成立. 但是，这些定理对于两个无界闭集就不再是真的了.

凝聚点. 设 E 为欧氏空间内的点集. 若在点 x 的任何邻域内都包含有 E 中的不可数的无限点集，则称 x 为集 E 的凝聚点. 凝聚点可属于 E，也可以不属于 E. 但是，若 E——不可数集，则 E 中必含有 E 的凝聚点. 因此，若一个集没有属于该集本身的凝聚点，则它至多是一个可数集.

一切凝聚点（包括属于集 E 的以及不属于集 E 的）所成之集是一完备集（无论原来的 E 是什么样的集）.

无论怎样的集 E，E 中不是 E 之凝聚点的那些点所成之集至多是一个可数集.

闭集与完备集的势. 若 E——欧氏空间内的非空完备集，则它具有连续统的势.

---

① 即是说，若集 E 在直线上，邻域即开区间；若 E 在平面上，邻域即开圆；若 E 在三维空间内，邻域即开球，等等.

若 E——欧氏空间内非可数闭集,则它可表为完备集(凝聚点的集)与至多是可数的集之和(康托-本狄克松(Contor-Bendickson)定理).

由此推知,欧氏空间内任何闭集或至多是可数集,或具有连续统的势.

直线上的开集,闭集,完备集的构造. 直线上的任何开集 G 可表为(并且是唯一的方法)有限个或可数个两两互不相交的开区间之和. 这些开区间称为集 G 的构成区间. 构成区间中有的可能是如下的无穷区间: $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

直线上的任何闭集 F 是由整个数轴去掉有限个或可数个两两互不相交的开区间而得到(这些开区间称为集 F 的邻接区间, 它们也是按已知的 F 而唯一确定的). 若闭集 F 是有界的(并且 $\inf F=a, \sup F=b$), 则所说的邻接区间通常是指仅在闭区间 $[a, b]$ 上的那些区间.

闭集为完备集的充要条件是任意一对邻接区间都无公共端点.

习　题

209. 已给数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$; 已知其下列各子序列都收敛:

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \cdots, a_{2k-1}, \cdots$$
$$a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, \cdots, a_{(2k-1)\cdot 2}, \cdots$$
$$a_4, a_{12}, a_{20}, a_{28}, \cdots, a_{(2k-1)\cdot 2^2}, \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{2^i}, a_{3\cdot 2^i}, a_{5\cdot 2^i}, a_{7\cdot 2^i}, \cdots, a_{(2k-1)\cdot 2^i}, \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

而且收敛于同一的数 b. 由此能否推出已给序列收敛?

210. 已给数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$; 已知它的两个子序列

$$a_{m_1}, a_{m_2}, \cdots, a_{m_k}, \cdots$$
$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

都收敛于相同的极限 b(下标 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k, \cdots\}$ 与 $\{n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots\}$ 总合起来组成全体自然数的集). 证明,已给序列也收敛(且收

敛于相同的极限).

211*. 举例表明$C[a, b]$内有这样的有界序列$\{f_n(x)\}$(对于一切的n, $\rho(f_n, 0)\leqslant A$),从这序列中选不出收敛的子序列.

212. 1*. 证明,若R——完备度量空间,而E——它的闭子集,则E也为完备度量空间.

212. 2*. 设R——任何的(完备或非完备的)度量空间,E——它的非闭子集.证明E为非完备空间.

212. 3*. 设$C_1[-1,1]$——在$[-1,1]$上具有距离$\rho(f,g)=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx$(参阅习题115)的连续函数空间.证明$C_1[-1,1]$——非完备空间.

212. 4*. 证明$C[a,b]$——完备空间.

212. 5*. 证明由$C[a, b]$内满足不等式$A\leqslant f(x)\leqslant B$(这里$A<B$——已知数)的一切连续函数所组成的子空间为完备空间.

212. 6*. 设$F(x)$与$G(x)$——在$[a, b]$上连续且在$[a, b]$上处处满足不等式$F(x)\leqslant G(x)$的两个确定的函数.证明由$C[a,b]$内满足不等式$F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$的一切连续函数$f(x)$所组成的子空间为完备空间.

213. 在平面上可数集E可否有极限点组成连续统,而且其中一点也不属于集E本身?

214. 平面上具有连续势的集E可否有极限点组成连续统,而且集E的极限点中,一点也不属于E?

215. 证明在线段上的不可数集,它至少有一凝聚点存在;用顺次把基本线段2等分,然后4等分,8等分等等的方法进行证明.

216. 设A_1与A_2——平面上的两个集,B_1与B_2——它们的凝聚点所成之集.证明$A_1\cup A_2$的凝聚点所成之集与集$B_1\cup B_2$

相同.

217. 上述定理可否推广到平面上的可数个集 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 的情形?

为了下面的需要,我们给出联络集的定义.

空间 R 内的集 E, 若能表为两个非空集之和 $E=A\cup B$ 使得集 B 的接触点中无一点被 A 所包含; 集 A 的接触点中无一点被 B 所包含; 则称 E 为非联络集.

若 E 不能表为具上述性质的非空集 A 与 B 之和, 则集 E 称为联络集.

218. 证明, 集 E 为联络集的必要充分条件是: 集 E 不能表为两个非空集之和 $E=A\cup B$, 对于 A、B 满足:

$$(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})=\varnothing.$$

219. 设 E——闭集. 证明, 集 E 为联络集的充要条件是: 它不能表为两个互不相交的非空闭集之和的形式.

220. 证明, 若集 E 为联络集, 则它的闭包 $\bar{E}$ 也为联络集. 举例表明其逆命题不真.

221. 证明, 闭区间为联络集.

222. 1) 证明, 闭圆为联络集. 2) 证明, 闭球为联络集.

223. 设 E_1 与 E_2——交为非空的两个联络集. 证明, 集 $E=E_1\cup E_2$ 也为联络集.

224. 证明, 对于直线上的集, 下述结论: «直线上的集 E 为联络集的必要充分条件为: 对于任意二点 $x_1\in E$ 与 $x_2\in E$, 线段 $[x_1, x_2]$ 被包含于集 E 内» 成立.

225. 证明, 下列各个集为直线上的联络集: а) 闭区间 $[a, b]$; б) 开区间 (a, b); в) 半闭区间 $(a, b]$; г) 半闭区间 $[a, b)$; д) 半直线 $[a, +\infty)$; е) 半直线 $(a, +\infty)$; ж) 半直线 $(-\infty, a]$; з) 半直线 $(-\infty, a)$; и) 全直线 $(-\infty, +\infty)$; к) 单点集; л) 空集.

证明, 除了 а)—л) 类型的集之外 (对于一切可能的 a 与 b,

$a<b$)，直线上其它的集一个也不是联络集.

226. 证明，平面为联络集.

227. 证明，若对于集E的任何二点，可找到联络集Q包含这些点，而Q被含于E内，则E为联络集.

228. 证明，平面上的开圆为联络集.

229. 证明，平面上的开圆不能表成两个非空而不相交的两个开集之和.

230. 证明，在平面上不存在同时既是开集又是闭集的集(空集与全平面除外).

231. 证明，在直线上不存在同时既是开集又是闭集的集(空集与全轴除外).

232. 平面上的开圆可否表为两个异于全平面的开集之交，而此两个开集之和组成全平面？

233. 举例表明，两个不相交的闭集之间的距离可以等于零(若这些集是无界的).

234. 举这样两个无界闭集A与B的例子，使$\rho(A,B)=1$且不存在点$a\in A$与$b\in B$，使$\rho(a,b)=1$.

235. 已给可数闭集$E=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\}$. 开区间组:

$$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon), \left(\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}\right), \left(\frac{1-\varepsilon}{4}, \frac{1+\varepsilon}{4}\right), \cdots, \left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right), \cdots$$

及$(-\varepsilon, \varepsilon)$覆盖了它；这里$\varepsilon$——小于$\frac{1}{2}$的已知正数. 从这个开区间组中选出覆盖集$E$的有限组.

236. 已给可数集$E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\}$. 开区间组:

$$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon), \left(\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}\right), \cdots, \left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right), \cdots$$

覆盖了它，这里$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. 从此覆盖中能否选出集$E$的有限覆盖？

237. 已给可数闭集 $E=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；开区间的无限组：

$$(1-\varepsilon,1+\varepsilon),(2-\varepsilon,2+\varepsilon),(3-\varepsilon,3+\varepsilon),\cdots,(n-\varepsilon,n+\varepsilon),\cdots$$

覆盖了它，这里 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. 从此覆盖中能否选出有限覆盖？

238. 考虑中心在点 O 的开单位圆 E；作半径为 $\frac{1}{3}$ 的同心圆周 C，又作中心在圆周 C 上，半径为 $\frac{2}{3}$ 的一切可能的开圆族，这些开圆组成了集 E 的无限覆盖. 证明，从此覆盖中不能选出有限覆盖.

239. 于习题 238 中所考虑的圆 E 的那个覆盖，从中能否选出可数覆盖？

240. 于习题 238 中所考虑的开圆族完全覆盖了中心在点 O，半径为 $1-\varepsilon$ 的闭圆$\left(这里\ \varepsilon——已知数,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$. 如何从这个覆盖中选出有限覆盖？

241. 证明，在平面上有开圆所组成之可数序列 G_1, G_2, $\cdots$, G_n, $\cdots$，它具有性质：任何开集 E 是此序列中某些圆的全体之和.

242. 证明，在平面上任意集 E 的由开集作成的任何覆盖中，可选出此集的可数覆盖.

243. 举出在直线上的有界开集被诸邻域所覆盖，而不能从这个覆盖中选出有限覆盖的例子.

244. 下述定理：《从有界闭集的由闭邻域组成之任何覆盖中可选出有限覆盖》是正确的吗？（开邻域的闭包称为闭邻域.）

245. 下述定理：《从有界闭集的由开集组成之任何覆盖中可选出有限覆盖》正确否？

246. 若从集 E 的由诸邻域所组成之任何覆盖中可选出有限覆盖，则称集 E 是致密的. 证明，任何致密集为有界闭集.

247*. 举例表明，在 C 空间内存在非致密的有界闭集.

248. 证明，若 E——直线上无处稠密点集，则形状为 $x+a$(这

里 $x\in E, a>0$ 的定数)的点所成之集 A 也无处稠密.

249. 设 E——直线上的处处稠密集; A——集 E 的任何有限子集. 证明,集 $E\setminus A$ 在直线上也处处稠密.

250. 在直线上是否存在两个处处稠密的不可数集,而它们的交是空集?

251. 可否作出直线上处处稠密的不可数集所作成的可数族

$$E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots,$$

使诸集中任何两个之交为空集(即是说,对任何的 $m\neq n, E_m\cap E_n=\varnothing$)?

252. 证明,对于直线上的任何闭集 F 能找到有限或可数子集 E,合 $\bar{E}=E$.

为了下面(习题 253—257)的需要,我们引入序列的极限集之概念.

设 F 为直线上的点集,又已给数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,若对于每一点 $x_0\in F$,存在有收敛于 x_0 的子序列: $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$; 且反之,已给数列的任何子序列皆收敛于 F 中的某一点,则称集 F 为已给数列的极限集.

253. 作一个序列,其极限集为空集.

254. 证明,若某序列之极限集为空集,则此序列的各项之模所成之序列收敛于 $+\infty$.

255. 作一个序列,其极限集为全轴.

256. 证明,任何序列的极限集为闭集.

257. 证明,对于直线上任何的闭集 F, 可作一个以 F 为极限集的序列.

我们现在引入将在习题 258—267 中所需用的级数之部分和的概念.

考虑绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$. 设 $\Pi=\{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$——自然数的任意集(无限的,有限的或空的). 下之和数: $\sum_{n\in\Pi} U_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 的对应子集

Π之部分和(特别是,数 0 为对应于自然数的空集之部分和,级数$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$之和为对应于全体自然数的集之部分和).

258. 作一个正项级数,使其一切部分和之集与闭区间[0, 1]相同.

259. 作一个正项级数,使其一切部分和之集与康托的完备集相同.

260. 证明,正项收敛级数的一切部分和所成之集为完备集.

261. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$——绝对收敛级数;证明,该级数的部分和所成之集为闭集.

262. 证明,若绝对收敛级数含有无穷多异于零的项,则其部分和所成之集为完备集.

263. 证明,若绝对收敛级数的和等于 s,则该级数的部分和所成之集 E 关于点$\frac{s}{2}$成对称(即是说,若 $x\in E$,则 $s-x\in E$).

264. 绝对收敛级数的部分和所成之集能否有孤立点?这些点能否为无穷多?

265. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$——正项收敛级数,合 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots$;证明下之论断:《要该级数的部分和所成之集为闭区间的必要充分条件是:对于任意的自然数 n,不等式 $a_n\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i$ 成立》.

266. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$——正项发散级数(对一切的 n,$a_n>0$).对这样的级数易于拓广级数之部分和的概念:若级数$\sum_{n\in\Pi}a_n$收敛,则它的和将称之为原来的级数之部分和.

证明,若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$——正项发散级数,并且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$;则该级数的

一切部分和所成之集为半直线$[0,\infty)$.

267. 正项发散级数的一切部分和所成之集能否有无穷多个孤立点.

268. 设 G——直线上处处稠密的开集. 证明,对于任意的开区间 I,可找到这样的开区间 I_0,合条件:

$$\bar{I}_0\subset I\cap G.$$

269. 证明,直线上处处稠密的可数个开集之交是一个处处稠密集.

270. 证明,在$[a,b]$上处处稠密的可数个开集之交在直线上具有连续统的势.

271. 证明,可数个在直线上无处稠密集的全体之和不能填满全直线.

272. 证明,有限个或可数个在直线上处处稠密的 G_δ 型集之交是处处稠密的 G_δ 型集.

273. 举出在直线上处处稠密的集所成之序列 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 合条件: $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$ 而且它们的交为空集: $\bigcap_n E_n=\varnothing$ 的例子.

274. 证明,直线上一切有理数的集不是 G_δ 型集.

275. 证明,直线上一切无理数的集不是 F_σ 型集.

276. 设 E——直线上的任意可数处处稠密集. 证明,它不是 G_δ 型集.

277. 设 E——直线上可数的处处稠密集的余集. 证明,它不是 F_σ 型集.

278. 证明,在任意半闭区间$[\alpha,\beta)$上的一切有理数的集不是 G_δ 型集;证明,在同样的半闭区间上的无理数的集不是 F_σ 型集.

279. 作出在直线上既非 F_σ 型集,也非 G_δ 型集的集的例子.

280. 证明,若 $A_1\supset A_2\supset\cdots A_n\supset\cdots$,这里 A_n——直线上的非空

有界闭集(它们的直径不一定趋于零),则它们的交非空集.

281. 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$——非空有界开集的序列; 举例表明,它们的交可以是空集.

282. 证明,若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$, 这里 A_n——直线上的非空有界开集,对任何的 n,有 $\bar{A}_{n+1} \subset A_n$,则它们的交 $\bigcap\limits_n A_n$ 非空集.

283. 证明定理:若直线上的有界闭集序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 合条件:这些集的任意有限个之交非空集,则此序列的一切集之交也非空集.

284. 若于习题 280, 282 与 283 中,集 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为有界的条件被取消,结论还成立吗?若不,则举出适当的例子.

285. 可否把康托集表为可数个两两互不相交的非空闭集之和?

286. 表闭正方形为两两互不相交的连续势那样多个非空完备集之和.

287. 已给某平面点集 E. 已知该集中所有二相异点之间的距离所成之集的下确界为正的. 证明集 E 至多可数.

288. 用 E 表示康托集的一切邻接区间的中点所成之集. 集 E 的导集是什么?它的闭包 $\bar{E}$ 是什么?第二级的导集是什么?如何分解 $\bar{E}$ 为完备集与可数集之和?

289. 设 D——康托集, $U_1, U_2, \cdots$——它的一切邻接区间(有限长). 试考虑康托集 D 与诸闭区间 $\left[a_n+\frac{\delta_n}{4}, a_n+\frac{3\delta_n}{4}\right]$ 以及诸点 $a_n+\frac{\delta_n}{8}, a_n+\frac{7\delta_n}{8}$ 之和的集 E, 这里 a_n——开区间 U_n 之左端点; δ_n——它的长.

集 E 为闭集吗?若是,则分解它为完备集与可数集之和.

290. 在直线上已给闭区间 $[a, b]$ 与完备集 E, 且闭区间之端点不属于 E. 证明,集 $E \cap [a, b]$ 为完备集.

291. 在直线上已给开区间(α, β)与无处稠密的完备集E. 证明，它们的交或为完备集或为可数个两两互不相交的完备集之和.

292. 在直线上已给两个无处稠密的完备集P与Q. 证明，这两个集之差$P\setminus Q$或为完备集，或为可数个两两互不相交的完备集之和.

293. 证明，可数个无处稠密的完备集之和可表为可数个两两互不相交的无处稠密的完备集之和.

294. 证明，直线不能表为可数个两两互不相交的闭区间之和.

295. 开区间(a, b)可否表为可数个两两互不相交的闭区间之和？

296. 闭区间$[a,b]$可否表为可数个两两互不相交的非空闭区间之和？

297. 表闭区间$[0, 1]$为在闭区间$[0, 1]$上处处稠密且具有下列性质的两个不相交的集A与B之和：对于任何的α与β, $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$, 交$(\alpha, \beta)\cap A$与$(\alpha, \beta)\cap B$皆具有连续势.

298. 证明，康托集具有下述算术结构：它是而且仅是由闭区间$[0, 1]$的这样一些点所组成，它们均能表成在三进位小数表示式中不含数字1的三进位小数.

299. 康托集的第一类点(即邻接区间的端点)的集是什么样的算术结构？第二类点(即康托集的其余的点)的集是什么样的算术结构？

300. 求出介于数0.1与0.2之间的康托集之任何一个第一类的点.

301. 求出介于数0.05与0.1之间的康托集之任何一个第二类的点. 能否选择这样的点，使得它是有理点？

302. 直线上的两个点集M与N，若在它们的元之间能建立起

保持顺序关系的一一对应(换言之,若 $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, $y_1 \in N$, $y_2 \in N$, x_1 对应于 y_1, 又 x_2 对应于 y_2, 则从 $x_1 < x_2$ 导出 $y_1 < y_2$), 则称点集 M 与 N 相似.

证明,闭区间[0,1]上的一切二进无理点的集与康托集的一切第二类点的集相似.

303. 闭区间[0,1]上的一切有理点所成之集与康托集的一切第一类点所成之集是否相似?

304. 证明,开区间(0, 1)的任何可数且在其上稠密的子集与该区间的一切二进有理点的集相似.

305. 包含康托集的第一类点,但第二类点一个也不包含的开区间是否存在?

306. 证明,若 E——直线上的非空完备集,则对于任意的点 $x \in E$,可找到这样的点 $y \in E$,使 x 与 y 之间的距离为无理数.

307. 在直线上的一切开集所成之集具有什么势?

308. 在平面上的一切开集所成之集具有什么势? (提示. 利用习题 241 之结果).

309. 在直线上的一切闭集所成之集具有什么势? 在平面上的呢?

310. 在直线上的一切完备集所成之集具有什么势? 在平面上的呢?

311. 证明,在 199—201 的例子中所作诸集为完备集.

312. 在直线上为无处稠密的非空完备集,其一切点均为无理点的这种集存在吗?

313. 设 E——直线上的任意可数点集. 问在直线上不含集 E 的点之完备集存在吗?

314. 设 E_0——在线段[0,1]上的无处稠密的完备集,而(α_1, β_1), (α_2, β_2), …, (α_n, β_n), …——它的邻接(开)区间. 在每一个

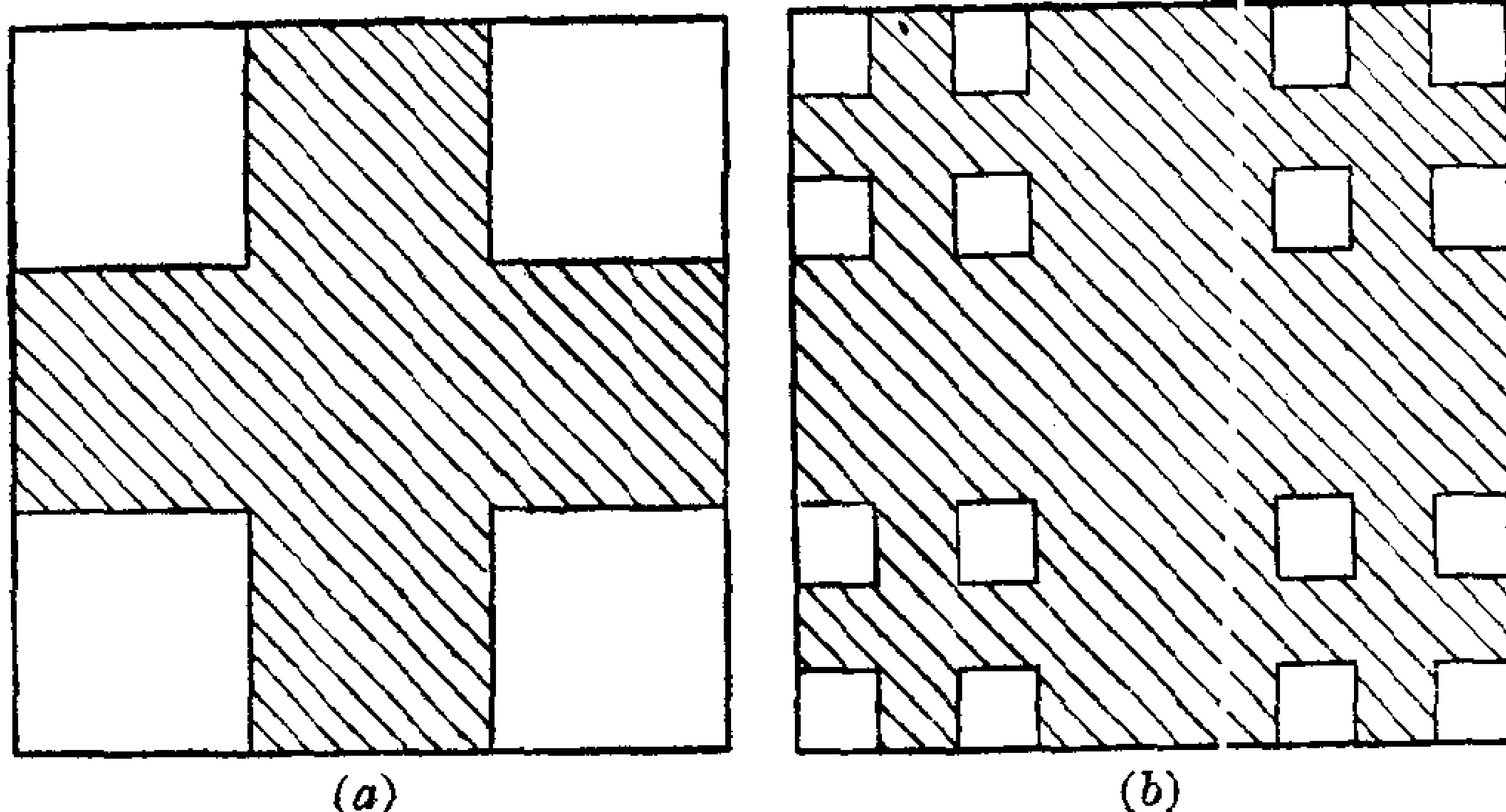
闭区间$[\alpha_i,\beta_i](i=1,2,3,\cdots)$上作一个无处稠密的完备集$E_i\subset(\alpha_i,\beta_i]$. 证明,1) 集$E_0\cup E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_i\cup\cdots$之和集$F$——在$[0,1]$上为完备且无处稠密;2) 集$E_1$, E_2, E_3, …①之一切邻接(开)区间而且只有它们才是集F的邻接(开)区间.

315. 平面上的一切有理点可编号如下:$M_1,M_2,\cdots,M_n,\cdots$(平面上的点,若它的两个坐标皆为有理数时称为有理点). 用v_n表中心在点M_n,半径为$\frac{\alpha}{n^2}$(α——已给正数)的开圆. 证明,平面上集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的余集$E$为无处稠密的闭集.

316. 在平面上用下面的方法作一个集A: 用直线$x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$分正方形$0\leqslant x\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant1$为9个相等的正方形,并去掉中心的开正方形$\left(\text{即正方形}\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3},\frac{1}{3}<y<\frac{2}{3}\right)$. 然后,把剩下的8个闭正方形中每个都分为9个相等的正方形,并去掉所有中心的开正方形;将此过程无限继续下去. 在可数次之后,剩下的集用A表示(它被称为《谢尔宾斯基 (Sierpinski) 地毯》). 证明,该集为完备且无处稠密的. 研究该集的算术结构.

317. 在平面上用下面的方法作一个集B: 用直线$x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$分闭正方形$0\leqslant x\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant1$为9个相等的正方且毗连于基本正方形顶点的四个闭正方形称为第一秩的正方形,而它们的和用B_1记之(图1, (a)). 然后把第一秩正方形中之每一个分为9个相等的闭正方形,且它们当中毗连于相应的第一秩正方形之顶点者称为第二秩的正方形;所有第二秩的16个闭正方

① 当$i\geqslant1$,集E_i的邻接区间指的是在闭区间$[\alpha_i,\beta_i]$上为集E_i的余集的那些开区间.



(a) (b)

图 1,(a). 集 B_1 是未画线条所剩下的部分.

图 1,(b) 集 B_2 是未画线条所剩下的部分.

形之和用 B_2 记之(图 1,(b)). 其次, 又分每一个第二秩的正方形为 9 个相等的闭正方形, 并称毗连于第二秩的相应正方形顶点的那些正方形为第三秩的正方形;所有第三秩的 64 个闭正方形之和用 B_3 记之,依此类推. 显然, $B_1\supset B_2\supset B_3\supset\cdots$. 一切 B_k 的公共部分称为《谢尔宾斯基墓垛》并用 B 记之: $B=\bigcap\limits_k B_k$.

证明, B 为无处稠密的完备集. 研究此集的算术结构.

318. 在 Oxy 平面上由满足下列条件: $0\leqslant x\leqslant 1$, $y\in D$(D——在 Oy 轴上的康托集)的一切点 $M(x, y)$ 所组成之集 E 称为《康托栉》. 证明,它为完备的无处稠密集,并研究它的算术结构.

319. 集 A(《谢尔宾斯基地毯》), B(《谢尔宾斯基墓垛》)与 E(《康托栉》)可否借助于取余集(关于闭区间[0,1])与交的运算,用康托集来表示?

第七章　集的测度

零-集. E——直线上的点集，若对任意的 $\varepsilon>0$，可找到覆盖 E 的有限个或可数个开区间组，合条件：这些开区间的长度之和小于 ε，则称 E 为直线上的零-集.

直线上的零-集的例子：任何有限或可数集，康托的完备集.

平面上的零-集 E 可类似地定义，将有限个或可数个开区间改换为有限个或可数个开圆组，它们的面积之和小于 ε.

在三维欧氏空间内的零-集可类似地定义.

零-集的性质：1）零-集之任何子集是零-集；2）有限个或可数个零-集的全体之和是零-集；3）零-集经可合移动[①] 的结果是零-集.

***K*-族与波氏族.** 直线上的集族 $\mathfrak{A}$，若具有下列性质时，称为 K-族：

а）$\mathfrak{A}$ 包含一切开区间.

б）若集 $M_1, M_2, \cdots$ 属于族 $\mathfrak{A}$，则它们的和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 也属于族 $\mathfrak{A}$（即是说，族 $\mathfrak{A}$ 关于可数和是不变的）.

в）从 $M\in\mathfrak{A}$，得 $CM\in\mathfrak{A}$（即是说，$\mathfrak{A}$ 关于取余集是不变的）.

г）从 $M\in\mathfrak{A}$，得 $M_\alpha\in\mathfrak{A}$，这里 M_α——是用向量 α 对集合 M 作可合移动所得之集（换言之，K-族关于可合移动是不变的）.

直线上之 K-族的例子：直线上的一切集所成之族.

平面上的 K-族可类似地来定义，只须把第一条性质改变为：

а）族 $\mathfrak{A}$ 包含一切开圆.

三维空间内的 K-族也用这样的方法来定义.

K-族的性质. 1）任何的 K-族自身包含一切开集，一切闭集，一切 F_σ 型与 G_δ 型的集.

2）任何 K-族关于可数交是不变的（关于有限交更是不变）.

---

① 即经某一平移之后而完全重合的二集称为可合的.（译者注）

3）在直线上存在有最小的K-族，即是说，这样的K-族被包含于直线上的任何K-族之内；在平面上与在三维空间内也存在有最小的K-族.

定义. 在直线上（或在平面上，或在空间内）的最小K-族称为在直线上（或在平面上，或在空间内）的波氏族.

含于波氏族中的任何集称为波氏集或 B-集. 显然，特别是在直线上（在平面上，在空间内）一切开集，一切闭集，一切 F_σ 型与 G_δ 型的集以及许多其它的集是直线上（平面上，空间内）的 B-集.

可测集. 对于集 E，若存在有这样的 B-集 A 与这样的零-集 α 与 β，使 $A\setminus\alpha\subset E\subset A\cup B$，则称集$E$为勒伯格(Lebesgue)可测（或简称为可测）. 换言之，若集E与某 B-集之差顶多是一个零-集，则E称为可测集.

可测集的性质：

1）任何 B-集可测.

2）任何零-集可测.

3）有限个或可数个可测集的全体之和是可测集.

4）可测集的余集可测.

5）可测集经可合移动的结果是可测集.

从性质 1, 3, 4, 5 得知，可测集所成之集族是K-族. 所以：

6）有限个或可数个可测集的全体之交是可测集.

7）两个可测集之差是可测集.

也应当注意，在直线上（平面上，空间内）并非任何集都可测；换言之，在直线上（平面上，空间内）有不可测集存在. 此外，不是零-集的任何可测集含有不可测子集.

集的测度. 满足下列条件的非负数 mE（有限的或$+\infty$）称为直线上的可测集E的线测度：

a）若E为区间，则 mE 乃为该区间之长.

б）若 $E_1, E_2, E_3, \cdots$两两互无公共点的有限个或可数个可测集，则诸集的和之测度等于它们的测度之和：

$$m\Big(\bigcup_n E_n\Big)=\sum_n mE_n.$$

в）对任何可测集E与任意的数 $\varepsilon>0$，存在有包含E的开集 G，合条件 $m(G\setminus E)<\varepsilon$.

平面上的可测集的面测度 mE 可类似地定义，这只要（在定义中）把条件

a) 改变为以下的条件:

a) 若E为开圆, 则平面测度mE等于该圆的面积.

用这样的方法也可定义三维空间中可测集的体测度mE.

测度的性质: 1) 满足条件a), б), в)的线测度对直线上的一切可测集是惟一确定的.

对于面测度(关于平面上的可测集)与体测度(关于空间中的可测集)类似的性质成立.

2) 若A与B——两个可测集, $A \supset B$, 则$mA \geqslant mB$.

3) 若$A \supset B$——两个可测集, 且$mB < \infty$, 则$m(A \setminus B) = mA - mB$.

4) 若$E_1, E_2, \cdots$可测集(甚至可以是相交的), 则诸集的和之测度不超过它们的测度之和: $m\left(\bigcup_n E_n\right) \leqslant \sum_n mE_n$ (假定相加的集是有限个或可数个).

5) 当且仅当可测集E为零-集时, 其测度为零.

6) 对于任意的可测集E与任意的数$\varepsilon > 0$, 存在含于E内的闭集F, 使$m(E \setminus F) < \varepsilon$.

7) 任何可测集E的测度为所有含于E内的闭集之测度的上确界, 与所有包含E的开集的测度之下确界:

$$mE = \sup_{F \subset E} mF = \inf_{G \supset E} mG.$$

8) 可测集的测度对于它的可合移动是不变的.

9) 若$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$——可测集所组成的升序列, 则诸集之和的测度等于$E_n$的测度当$n \to \infty$时的极限:

$$m\left(\bigcup_n E_n\right) = \lim_{n \to \infty} mE_n.$$

10) 若$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$——可测集所组成的降序列, 且$mE_1 < \infty$, 则诸集之交的测度等于$E_n$的测度当$n \to \infty$时的极限:

$$m\left(\bigcap_n E_n\right) = \lim_{n \to \infty} mE_n.$$

习　题

320. 证明，位于 Ox 轴上的任何集 E(甚至该它在直线上为不可测集)在 Oxy 平面上可测且它的面测度等于零.

321. 证明，直线上(平面上也一样)一切可测集的全体具有势 2^c(超连续统).

322. 在线段[0, 1]上作一个完备的无处稠密集，其线测度等于 0.9.

323. 在线段[0, 1]上作一个完备的无处稠密集，具有已给测度 a(这里 $0\leqslant a<1$).

324. 在线段[0, 1]上能否作出测度等于 1 的完备的无处稠密集.

325. 在正方形$[0,1]\times[0,1]$上作一个完备的无处稠密集，其面测度等于已给的非负数 $a(0\leqslant a<1)$.

326. 在习题 316 中所作的集(《谢尔宾斯基地毯》)之面测度等于什么？

327. 在习题 317 中所作的集(《谢尔宾斯基蕌垛》)之面测度等于什么？

328. 在习题 318 中所作的集(《康托梏》)之面测度等于什么？

329. 证明，直线上具有正的线测度 p 的任何有界可测集 E 含有测度为 q 的可测子集(这里 q——小于 p 的任意已给正数).

330. 证明，直线上的任何可测集 E(不一定有界)，合 $mE=p>0$，则 E 含有测度为 q 的可测子集(这里 q——小于 p 的任意已给正数).

331. 设 E——直线上的可测集，$mE=p>0$，而数 q——小于 p 的任何正数. 证明，存在完备子集 $M\subset E$，合 $mM=q$.

332. 证明，具有正线测度的任何可测集有连续统的势.

333. 证明，平面上具有正的面测度 p 的任何可测集 E 含有面测度为 q 的可测子集 M（这里 $q<p$——已给正数）.

334. 证明，平面点集 $M\subset E$（参阅上题）可挑选为完备的.

335. 证明，测度为无穷的任意可测集含有具预先任意给定正测度 q 的可测完备子集.

336. 至少含有一个内点的集之测度可否等于零？

337. 在线段$[a,b]$上能否作一个线测度为 $b-a$，而异于整个线段的闭集？

338. 可测集的交 $\bigcap\limits_n E_n$，这里

$$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$$

并且对任意的 n，$mE_n=\infty$。它能否有无穷测度？能否有有限测度？零测度？

339. 和集 $\bigcup\limits_n E_n$，这里 $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots\subset E_n\cdots$，并且每一个 E_n 的测度为有限. 它能否有有限测度？这个和集能否有无穷测度？

340. 设 E——线段$[0,1]$在二进位表示式中所有偶数位置上的数字皆为零的一切点（当这些点用无尽二进位小数表示时）所成之集. 证明，E 无处稠密且 E 之测度为零.

341. 在直线上作一个与半闭区间$(0,1]$为相似①的零测度集.

342. 在直线上作一个与康托完备集为相似的具已给正测度 $\mu>0$ 的集.

343. 直线上的无界可测集能否有有限的正测度？

344. 证明，直线上测度为零的任何非空闭集为无处稠密的. 对于平面以及对于三维空间的情形求证类似的问题.

---

① 两个集相似的定义参阅 302 题.（译者注）

345. 设在线段[0, 1]上集E有零测度. 它的闭包$\bar{E}$是否也为零测度集?

346. 设在线段[0,1]上集E无处稠密且它的测度等于零. 它的闭包$\bar{E}$是否也为零测度集?

347. 证明, 若E——在直线上的正测度可测集, 则在该集内可找到这样的一些点, 它们之间的距离为无理数.

348. 设E——在线段$[a,b]$上的具正测度之可测集, 证明, 在该集中至少可找到一对点, 它们之间的距离为有理数.

349. 证明, 若E——数轴上的具正测度之无界集, 则在该集中至少可找到一对点, 它们之间的距离为有理数.

350. 证明, 对于每一个可测集E可作这样一个F_σ型的集A与这样一个G_δ型的集B, 使合: 1) $A\subset E\subset B$; 2) $m(E\setminus A)=0$; $m(B\setminus E)=0$.

注. 若集E的测度为有限, 则条件2)等价于$mE=mA=mB$; 若$mE=\infty$, 则条件2)比等式$mE=mA=mB$更强.

351. 由线段[0, 1]中展为十进位小数时, 不含数字7的一切点所成之集有什么样的构造和什么样的测度?

352. 由线段[0, 1]中展为十进位小数时, 不能没有数字7的一切点所成之集有什么样的构造和什么样的测度?

353. 直线上在十进位小数表示式中, 不用数字7的一切点所成之集有什么样的构造和测度?

354. 线段[0,1]上在十进位无尽小数表示式中, 出现由1到9的数字的点所成之集有什么样的构造和什么样的测度?

355. 线段[0,1]上在十进位表示式中, 无数字2, 2, 2接连并排的这一切点所成之集有什么样的构造和什么样的测度?

356. 以康托集的每一点为中心, 画长为0.1的开区间; 一切这些区间之和集的测度等于什么?

357. 用(a_1,b_1), (a_2,b_2), …, (a_n,b_n), …表示闭区间$[0,1]$上测度为0.6的完备的无处稠密集E的邻接区间(并且$\inf E=0$, $\sup E=1$). 以每一点a_i为中心, 画长为$\frac{b_i-a_i}{4}$的开区间u_i, 又以每一点b_i为中心, 画这样的开区间$v_i\left(长为\frac{b_i-a_i}{4}\right)$. 集$\left(\bigcup_i u_i\right)\bigcup\left(\bigcup_i v_i\right)$覆盖了整个集$E$吗? 集$\left(\bigcup_i u_i\right)\bigcup\left(\bigcup_i v_i\right)$的测度是什么?

358. 正方形$[0,1]\times[0,1]$中两个坐标都是无理数的一切点所成之集用E来表示. 作一个完备子集$M\subset E$, 使集M的面测度是正的.

359. 线段$[0,1]$可否表为两个不相交的可测集A与B之和, 使对任何的开区间$(a,b)\subset[0,1]$有: $m\{(a,b)\cap A\}>0$与$m\{(a,b)\cap B\}>0$成立?

360. 在线段$[a,b]$上可数个完备的无处稠密集之和能否有测度为$b-a$?

361. 在线段$[a,b]$上两两互不相交的可数个完备的无处稠密集之和可否有测度$b-a$?

362. 在闭区间$[0,1]$上测度为零的不可数稠密集是否存在?

363. 设E_1,E_2, …——在线段$[0,1]$上具下述性质的可测集序列: 对任何的$\varepsilon>0$, 从这个序列中可找到这样的集E_k, 使$mE_k>1-\varepsilon$. 证明, 这些集之和的测度等于1.

364. 在线段$[0,1]$上已给两个可测集A_1与A_2, 合: $mA_1+mA_2>1$. 证明, 交$A_1\cap A_2$有正测度.

365. 在线段$[0,1]$上已给n个可测集$A_1,A_2,\cdots,A_n$合条件, 它们的测度之和大于$n-1$:

$$mA_1+mA_2+\cdots+mA_n>n-1.$$

证明，交 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 有正测度.

366. 设 E——在直线上的不可测集，而 A——在同一直线上的零测度集. 证明，集 $E\cap CA$ 不可测.

第二部分

函数论

第八章　映射的一般理论

若对于集R的每一点x，按确定的规律，使集L中某一完全确定的点y与它对应，则说R到L中的映射被给定；这个映射也称为变R到L中的函数，并且称R为函数的定义域或函数的定义集。

我们用$f(x)$表示定义于R内而取值于L中的任何函数。设$A\subset R$。则用$f(A)$表示那些而且仅是那些$y\in L$，它们是$f(x)$至少对于一个$x\in A$的函数值。集$f(A)$称为集A的像。特别是，整个定义域的像（即是说，集$f(R)\subset L$）称为值域或函数$f(x)$的值集。

设B——集$f(R)$的任何子集。用$f^{-1}(B)$表示R中那些而且仅是那些点x，对于这些x的函数值被包含于B中。集$f^{-1}(B)$称为集B的原像。

习　题

367. 设A——函数$f(x)$的定义域中任意一个集。等式$f^{-1}[f(A)]=A$正确吗？

368. 设B——函数$f(x)$的值域中任意一个集。等式$f[f^{-1}(B)]=B$正确吗？

369. 下面的说法：

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B);$$

$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$$

正确吗？若这些说法中的任何一个不正确，则举出反例。

370. 证明，若 $y=f(x)$ 为集 R 到集 $f(R)$ 中的一一映射，则对任何集序列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots (A_k \subset R)$ 下列等式正确：

$$f\left(\bigcup_k A_k\right)=\bigcup_k f(A_k),$$

$$f\left(\bigcap_k A_k\right)=\bigcap_k f(A_k),$$

$$f(\overline{\lim} A_k)=\overline{\lim} f(A_k),$$

$$f(\underline{\lim} A_k)=\underline{\lim} f(A_k).$$

371. 若映射 $y=f(x)$ 不是一对一地，上题中所考虑的等式有那些不再是正确的了？

372. $f(R\setminus A)=f(R)\setminus f(A)$ 正确吗？这里 R——函数的定义域.

373. 设 A 与 B——函数 $y=f(x)$ 的值域中之两个集. 下列等式：

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$

正确吗？

374. 设 L——函数 $y=f(x)$ 的值域，而 $A\subset L$，等式：$f^{-1}(L\setminus A)=f^{-1}(L)\setminus f^{-1}(A)$ 正确吗？

375. 设 $y=f(x)$——任何的函数，而集 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 为它的值域之子集. 等式：

$$f^{-1}\left(\bigcup_k A_k\right)=\bigcup_k f^{-1}(A_k),\quad f^{-1}\left(\bigcap_k A_k\right)=\bigcap_k f^{-1}(A_k);$$

$$f^{-1}(\overline{\lim} A_k)=\overline{\lim} f^{-1}(A_k),\quad f^{-1}(\underline{\lim} A_k)=\underline{\lim} f^{-1}(A_k)$$

正确吗？

第九章　欧氏空间中的连续函数

设 $y=f(x)$ 为欧氏空间内的已知函数，它取得的值是数值(换言之，函数 $f(x)$ 的定义域是欧氏空间 H_n 内的任何一个集 A，而值域——实数的某一个集).

设 E——在同一个空间 H_n 内的任意的集.

我们来给出函数在点 x_0 相对于集 E 的连续性定义.

定义 1 (柯西). 定义在集 A 上的函数 $f(x)$，若满足两个条件:

1) $x_0 \in A \cap E$;

2) 对于任意的 $\varepsilon>0$，存在点 x_0 的这样一个邻域 $U(x_0)$，使对于一切 $x \in A \cap E \cap U(x_0)$，不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

都成立，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 相对于集 E 为连续.

由此得知，特别是，若 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的孤立点，则该函数在点 x_0 相对于包含点 x_0 的任何集 E 都是连续的.

由定义 1 也可得知，若 x_0 为集 E 的孤立点，则任何在 x_0 点有定义的函数 $f(x)$ 在该点相对于 E 为连续.

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 相对于它的某个邻域为连续，则称它在点 x_0 为完全连续. 在不会导致不明瞭的情形下，我们将省略«完全»这个词，并且把函数在点 x_0 为完全连续简称为在该点连续.

显然，若函数在点 x_0 完全连续，则它在该点相对于包含点 x_0 的任何集 E 也连续.

例子. 1) 在 H_1 上处处有定义的函数 $y=x^2$ 于每一个点 $x_0 \in H_1$ 为连续.

2) 迪里赫列(Dirichlet)函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数,}\end{cases}$$

在 H_1 上处处有定义，它在点 $x_0=\sqrt{2}$ 相对于一切无理数的集为连续；但它在该点不是完全连续.

3）函数

$$f(x, y)=\begin{cases}10, \text{ 若 } x^2+y^2\leqslant 1, \\ 5, \text{ 若 } x^2+y^2>1,\end{cases}$$

在点 $M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$相对于中心在坐标原点的闭单位圆$E$为连续；但它在该点非完全连续．这个函数在圆$E$内部任何一点$M_1(x, y)$完全连续；所以，它在点$M_1$也相对于任何包含点$M_1$的集为连续．

对于一元函数（即是说，定义域在直线H_1上的函数）也可论及关于单边连续性．

定义在数轴上或在它的部分上的函数$f(x)$，若它在点x_0相对于某个半闭区间$[x_0, b)$连续，这里$b>x_0$，则称它在点x_0为右连续；若此函数在点x_0相对于某个半闭区间$(a, x_0]$连续，这里$a<x_0$，则称此函数在点x_0为左连续．

容易知道，若函数在点x_0既为右连续，又为左连续，则它必在该点为完全连续．

我们现在给出与柯西定义等价的函数连续性的另一个定义．

定义 2（海因）．定义在集A上的函数$f(x)$，在点x_0若满足两个条件：

1）$x_0\in A\cap E$；

2）对于$A\cap E$中收敛于x_0的任意的点列$\{x_n\}$（即是说，$\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_k, x_0)=0$），等式

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=f(x_0)$$

成立，则称$f(x)$在点x_0相对于集E连续．

函数在集上以及在点的振幅．设函数$f(x)$定义在集A上，该函数在集A上的上确界与下确界之差：

$$\underset{A}{\omega}f(x)=\sup_A f(x)-\inf_A f(x)$$

称为函数$f(x)$在集A上的振幅．应当注意，我们并未要求函数$f(x)$在集A上有界．因此，$\sup\limits_A f(x)$可以或等于有限数（若$f(x)$在集A上为上方有界），或等于$+\infty$（若此函数在A上为上方无界）．完全一样，$\inf\limits_A f(x)$可以或等于有限数，或等于$-\infty$．所以

$$0\leqslant\underset{A}{\omega}f(x)\leqslant+\infty.$$

若$A_1\subset A_2$，则$\sup\limits_{A_1}f(x)\leqslant\sup\limits_{A_2}f(x)$；$\inf\limits_{A_1}f(x)\geqslant\inf\limits_{A_2}f(x)$．因此，

$$\underset{A_1}{\omega}f(x)\leqslant\underset{A_2}{\omega}f(x).$$

设函数 $f(x)$ 在欧氏空间内的集 A 上有定义；设 E——在同一空间内的任意一个集，且 $x_0 \in A \cap E$. 此函数在集 $A \cap E \cap V_{\delta_n}(x_0)$ 上的振幅当 $\delta_n \to 0$ 时的极限(这里 $V_{\delta_n}(x_0)$——点 x_0 的半径为 δ_n 的邻域) 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 相对于集 E 的振幅(记作 $\omega[f(x), x_0, E]$). 这个极限(有限或等于 $+\infty$)恒存在且与邻域序列 $\{V_{\delta_n}(x_0)\}$ 的选择无关(只是当 $n \to \infty$ 时，这些邻域的半径趋于零). 因此[①]

$$\omega[f(x), x_0, E] = \lim_{\delta_n \to 0} \underset{A \cap E \cap V_{\delta_n}(x_0)}{\omega} f(x).$$

利用函数在一点的振幅之概念可以给出等价于前两个概念的第三个函数连续性定义.

定义 3 (贝尔 (Baire)). 定义在集 A 上的函数 $f(x)$, 若 $x \in A \cap E$, 并且函数在此点相对于集 E 的振幅等于零:

$$\omega[f(x), x_0, E] = 0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 相对于集 E 连续.

间断点. 设函数 $f(x)$ 定义于集 E 上 $(E \subset H_n)$; E 中的任何点，若函数在该点(相对于集 E)的振幅不等于零，则称该点为函数的间断点；此外，定义域的任何不含于其内的极限点也算作间断点.

例子. 函数 $y = \operatorname{sgn} x$ (读作《西格鲁蒙爱克司》), 由下面的等式来定义: 当 $x > 0$ 时, $\operatorname{sgn} x = 1$; 当 $x < 0$ 时, $\operatorname{sgn} x = -1$; $\operatorname{sgn} 0 = 0$——在点 $x_0 = 0$ 间断.

点 x_0, 若只需改变函数在这一点的值(或在这一点补充定义，如果函数在这一点没有定义的话)就可能使函数在点 x_0 成为连续的，则称 x_0 为函数的可移间断点.

在一点连续的函数之性质. 1) 若 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在点 x_0 相对于集 E 连续，则这些函数之和与乘积也在该点相对于 E 连续.

2) 若 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在点 x_0 相对于 E 连续，并且 $\psi(x_0) \neq 0$, 则函数 $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 也在点 x_0 相对于 E 连续.

3) 设函数 $y = \varphi(x)$ 在点 x_0 相对于集 E (位于空间 H_n 内) 连续，且 $\varphi(x_0) = y_0$; 此外，设一元函数 $z = \psi(y)$ 在点 y_0 相对于在 Oy 轴上的某个集 F

---

① 谈到函数 $f(x)$ 在点 x_0 的振幅时，若我们没有指明相对于任何的集 E 来研究这个振幅，则理解为所论及的在点 x_0 的振幅是相对于该点的某个邻域而言. 此时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的振幅记为: $\omega(f(x), x_0)$.

连续. 则这些函数的叠合——复合函数 $z=\psi[\varphi(x)]$ 在点 x_0 相对于集 $E\cap\varphi^{-1}(F)$ 连续.

4) 若函数 $f(x)$ 定义于集 A 上且在点 x_0 相对于 E 连续, 则它在此点的某邻域内有界(准确地说, 在集 $A\cap E$ 与点 x_0 的某个邻域之交上为有界).

5) 若函数 $f(x)$定义在集 A 上, 并且在点 x_0相对于 E 连续, 并且 $f(x_0)>0$, 则存在点 x_0 的这样一个邻域 $V(x_0)$, 使对于一切的 $x\in A\cap E\cap V(x_0)$, 都有 $f(x)>0$; 当 $f(x_0)<0$ 时, 类似的结论成立. 这可简述为: «在点 x_0 连续的函数在该点的某个邻域内保持自身的符号».

显然, 若所论及的函数在相应点是完全连续的, 这一切性质的叙述就更为简单.

再指出一个明显的性质.

6) 设函数 $f(x)$定义在 E 上, $E_1\subset E$. 若函数 $f(x)$在某点 $x_0\in E_1$ 相对于 E 连续, 则它在该点也相对于 E_1 连续.

但应注意, 逆命题不真: 函数在点 x_0 的某个邻域可以是相对于 E_1(这里 $E_1\subset E$)连续, 但在该点相对于整个集 E 不是连续的.

有界闭集上连续函数的性质. 定义. 设函数 $y=f(x)$定义在集 E 上. 若它在集 E 上的一切点相对于该集连续, 则称它在 E 上连续.

我们现在研究欧氏空间的有界闭集上连续函数的某些性质.

定理 1. 若函数 $f(x)$ 在有界闭集 E 上连续, 则它在 E 上有界 (即是说, 存在这样的数 $C>0$, 使对一切的 $x\in E$, 有 $|f(x)|\leqslant C$).

定理 2. 若函数 $f(x)$ 在有界闭集 E 上连续, 则它在该集上达到自身的上确界和下确界, 即是说, 存在这样的点 $x_1\in E, x_2\in E$, 使得

$$f(x_1)=\sup_{x\in E}f(x);\quad f(x_2)=\inf_{x\in E}f(x).$$

为了叙述定理 3, 我们给出函数一致连续的定义。

函数 $f(x)$定义在集 E 上, 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在这样的 $\delta>0$, 使对任何的 $x'\in E$ 与 $x''\in E$, 只要是 $\rho(x', x'')<\delta$, 不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

就成立, 则称 $f(x)$在 E 上一致连续.

容易看出, 若 $f(x)$在 E 上一致连续, 则它在集 E 上连续; 逆命题一般说是不成立的. 但是, 若 E——有界闭集, 则逆定理(定理 3)是正确的.

定理 3. 若函数在有界闭集 E 上连续, 则它在 E 上一致连续.

间断点的集. 设函数 $f(x)$ 定义在闭集 E 上. 在这种情形, 一切间断点(设它们是)属于集 E. 下面的结论成立:

定义在闭集上的函数之一切间断点所成之集 B 是 F_σ 型的集.

由此容易推出, 给定在闭集上的函数之连续点所成之集是 G_δ 型的集.

特征函数. 设 E——欧氏空间内任意的集. 用下之等式

$$当\ x\in E\ 时, \chi_E(x)=1;\quad 当\ x\overline{\in} E\ 时, \chi_E(x)=0$$

所给出的函数称为集 E 的特征函数.

例如, 对一切有理数等于 1, 对一切无理数等于 0 的迪里赫列函数是直线上有理数集的特征函数.

一元连续函数. 定义在集 E 为数轴或其一部分的函数 $y=f(x)$, 则我们说 $f(x)$ 是实变量的一元函数. 不言而喻, 上面对于定义在欧氏空间内的函数所述的一切定理对实变量一元连续函数都成立; 但是, 除此以外, 一元函数也有其自身的某些特殊性质. 我们来叙述它们.

定理 1 (维尔斯特拉斯第一定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在这样的多项式 $P(x)$, 使对一切的 $x\in[a, b]$, 不等式:

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

成立.

定理 2 (维尔斯特拉斯第二定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上连续, 并且 $f(0)=f(2\pi)$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在这样的三角多项式 $T(x)$:

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

使对一切的 $x\in[0, 2\pi]$, 不等式:

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon$$

成立.

定理 3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)=A$, $f(b)=B$. 又设 C——介于 A 与 B 之间的任何一个数, 则存在这样的点 $c\in[a, b]$, 合 $f(c)=C$.

设函数 $f(x)$ 给定在全直线上或其某一段上. 若对于 $f(x)$ 的间断点 x_0, 当 $x\to x_0$ 时, 两个单边极限

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

都存在, 且二者皆有限, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 若这些极限有一个不存在, 或存在但等于无穷, 则称 x_0 为第二类间断点.

导数. 对于一元函数, 我们可定义在点 x 的导数:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

可以证明, 若在点 x 的导数存在, 则函数 $f(x)$ 在该点连续; 逆命题不真: 函数可以是在点 x 连续, 但在该点没有导数. 此外, 维尔斯特拉斯指出, 存在 $[a, b]$ 上连续的函数, 但在闭区间 $[a, b]$ 上的任何点都无导数.

若给定在闭区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$, 它的导数在此闭区间上处处存在[①], 则称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有导函数. 这时, 称函数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数(它在 $[a, b]$ 上处处有定义). 若函数在 $[a, b]$ 上有导函数, 则此导函数本身不一定是连续函数. 例如, 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0\end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处有导数; 但是该导数在点 $x=0$ 间断. 该导数可用下面的等式来给出:

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

但是导函数不能有第 1 类间断点(因此, 它在线段 $[a, b]$ 上的每一点或连续, 或有第 2 类间断点). 这可从导函数的下述性质推知:

达布(Darboux)定理. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有导函数, 并且 $f'(a)=A$, $f'(b)=B$, 则对介于 A 与 B 之间的任意的 C, 存在这样的点 $c\in[a, b]$, 使 $f'(c)=C$.

习　　题

376. 证明, 任何有界闭集的连续映像是有界闭集.

注. 若函数 $f(x)$ 在 E 上有定义而且连续, 则 $f(E)$ 称为集 E 的连续映像.

---

① 此时假定在点 a 处函数有右导数 $\left(\text{即} \lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$, 在点 b 处函数有左导数.

377. 举例表明,无界闭集的连续映像不一定是闭集.

378. 证明,闭集的连续映像是 F_σ 型的集.

379. 证明,开集的连续映像是 F_σ 型的集;举例证明,开集的连续映像不一定是开集.

380. 设 $y=f(x)$——定义在整个数轴上的连续函数,而 F——在 Oy 轴上的任意闭集.证明,集 $f^{-1}(F)$ 是闭的.

381. 设 $y=f(x)$——定义在整个数轴上的连续函数,而 G——在 Oy 轴上的任意开集.证明,集 $f^{-1}(G)$ 是开的.

382. 证明,若 A——F_σ 型的集,而 B——G_δ 型的集(二者皆在 Oy 轴上),又若函数 $y=f(x)$ 在整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,则 $f^{-1}(A)$——F_σ 型的集,而 $f^{-1}(B)$——G_δ 型的集.

383. 对于连续映射,有界闭集的原像能否是无界的?

384. 证明,定义于整个数轴上的函数 $y=f(x)$ 为连续的必要充分条件是:一切开区间 $a<y<b$ 的原像都是开集.

385. 证明,若函数 $y=f(x)$ 定义在整个数轴上,又若所有的集 $y\leqslant a$ 与所有的集 $y\geqslant a$ 的原像是闭的(对于任意的 a),则函数 $f(x)$ 在 Ox 轴上的一切点为连续的.

386. 设定义在整个数轴上的函数只取得整数值.证明,这样的函数之连续点的集是开集,而间断点的集是闭集.

387. 证明,若 $f(x)$——在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数,则和集 $E_1\cup E_{10}\cup E_{10^2}\cup\cdots\cup E_{10^k}\cup\cdots$ 是闭的(这里 E_n——闭区间 $[a,b]$ 上合条件 $n\leqslant f(x)\leqslant n+1$ 的一切点所成之集).

388. 函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上,若对 $[a, b]$ 上任意二点 x_1 与 $x_2(x_1<x_2)$ 以及介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任意数 C,能找到点 ξ $(x_1<\xi<x_2)$,使得 $f(\xi)=C$,则说 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有达布性质.达布性质的满足是否为函数 $f(x)$ 在线段 $[a, b]$ 上连续的充分条件?

389. 达布性质以及下述性质：对于任意的y_0，线段$[a, b]$上满足$f(x)=y_0$的这些点x所成之集是闭的；这两个性质同时满足是否为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续的充分条件？

390. 设E——线段$[a,b]$上的点x所成之任意可数集. 试作一个在集E上一切点间断且在线段$[a,b]$的其余的点连续的函数.

391. 设$\varphi(x)$——在数轴上处处给定、有界且除了$x=0$外在一切点都连续的函数；设$\sum\limits_n a_n$——正项数值收敛级数，而集$\{x_n\}$——直线上的处处稠密可数点集. 求函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi(x-x_k)$$

的间断点集与连续点集.

392. 证明，定义在全直线上的函数不可能在处处稠密的可数集E上连续且在直线上其它的点间断.

393. 作出一个在数轴上一切点有定义，除了点$x=1$与$x=-1$以外，处处间断且在这两点连续的函数.

394. 作出一个在数轴上除了点$x=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$以外，在数轴上其余一切点都间断的函数.

395. 在康托集的点等于1，且在数轴上其余一切点等于2的函数有什么样的间断点. 这些间断点是第1类的或是第2类的？

396. 作出一个定义在闭区间$[0, 3]$上，而在可以用有限十进位小数来表示的每一点间断，且在不能用有限十进位小数来表示的点连续的函数.

397. 在闭区间$[0,1]$上由下列等式定义函数$f(x)$：

在康托集的点$f(x)=0$，

在邻接区间的中点$f(x)=1$，

在$\left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$与$\left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$这两段中$f(x)$是线性的，这里

(a_n, b_n)——邻接区间. 求函数 $f(x)$的间断点和连续点.

398. 在闭区间$[0,1]$上,用下列等式给出函数 $f(x)$:

在康托集的点 $f(x)=0$,

在第 n 个邻接区间的中点 $f(x)=c_n$,

在$\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$, $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$这两段中 $f(x)$是线性的. 假定康托集的邻接区间按它们的长度减小顺序进行编号: $(a_1, b_1)=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $(a_2, b_2)=\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $(a_3, b_3)=\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, $(a_4, b_4)=\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $(a_5, b_5)=\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, …

考虑下列情况:а) 序列$\{c_n\}$合 $\lim c_n=0$; б) $\lim c_n\neq 0$; в) 序列$\{c_n\}$无极限.

研究这个函数 $f(x)$的连续性.

399. 作出一个在线段$[0,1]$的一切无理点连续且在一切有理点间断的函数.

400. 在线段$[0,1]$的一切有理点连续且在一切无理点间断的函数存在吗?

401. 作出一个在康托集的一切点连续且在邻接区间的一切点间断的函数.

402. 作出一个在康托集的邻接区间之一切点连续且在康托集上处处间断的函数.

403. 研究在数轴上的有理点等于 x^2 且在无理点等于$-x^2$ 的函数.

404. 用下面的方法定义函数 $f(x)$: 在直线上某个无处稠密的完备集之一切点,它等于零; 在每一个邻接区间上,它的图形是以这个邻接区间作直径的半圆周(且 $y\geqslant 0$). 此函数在哪些个点连续?

405. 证明,对于定义在集A上的任意函数有以下的等式

成立：

$$\underset{A}{\omega} f(x)=\sup_{\xi\in A,\eta\in A}|f(\xi)-f(\eta)|.$$

406. 证明，若定义在集E上的函数$f(x)$在点$x_0\in E$连续，则函数$|f(x)|$在该点也连续.

407. 举出这样的一个函数$f(x)$的例子，使$f(x)$在线段$[0,1]$的一切点间断，而$|f(x)|$——在$[0,1]$上的连续函数.

408. 用下面的方法在数轴上定义函数$f(x)$:

在无理点，$f(x)=0$;

在能被表为既约分数$\frac{p}{q}\neq 0$(这里$q>0$)这种形状的有理点，$f(x)=\frac{(-1)^p}{q}$;

当$x=0$，$f(x)=1$.

求它的一切间断点与连续点.

409. 设E——数轴上任意的已知F_σ型的集. 作出在集E的一切点间断且在Ox轴的其余的点连续的函数$f(x)$.

410. 作出在正方形$[0,1]\times[0,1]$的一切点间断，但对任意固定的$y\in[0,1]$作为x的一元函数时为连续的函数$f(x,y)$.

411. 用下面的方法在正方形$[0,1]\times[0,1]$上定义二元函数$f(x,y)$：在一对坐标都是无理数或一对坐标都是有理数的点，$f(x,y)=0$；此外，在$x=0$或$y=0$的点，$f(x,y)=0$；在横坐标等于有理数$\frac{p}{q}>0$(既约分数，$q>0$)，而纵坐标等于无理数的点，$f(x,y)=\frac{1}{q}$；在横坐标为无理数，而纵坐标等于$\frac{p}{q}>0$($q>0$)的点，$f(x,y)=-\frac{1}{q}$. 该函数在什么点间断，又在何处它连续？

412. 下列函数是否一致连续：1) $y=\sin\frac{1}{x}$在开区间$(0,1)$上；2) $y=x\sin\frac{1}{x}$在开区间$(0,1)$上；3) $y=3x$在整个数轴上；

4) $y=x^2$ 在整个数轴上； 5) $y=\frac{\sin x}{x}$ 在半直线$(0,+\infty)$上.

413. 证明，若函数在有界集E上一致连续，则它在E上有界.

414. 设$f(x)$与$g(x)$——在E上一致连续的函数. 它们的和在E上是否为一致连续函数？

415. 设$f(x)$与$g(x)$——在E上一致连续的函数. 它们的乘积在E上是否为一致连续函数？若E——有界集合，它们的乘积在E上是否为一致连续函数？

416. 证明，若函数$f(x)$在半直线$0\leqslant x<+\infty$上有定义且连续，又$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，则它在此半直线上一致连续.

417. 在半直线$0\leqslant x<+\infty$上连续且有界的函数$f(x)$在此半直线上一致连续，这正确吗？

418. 在习题397中所作的函数$f(x)$是否在集E上连续，这里E——康托集关于整个线段$[0,1]$的余集？此函数在E上是否一致连续？

419. 用下述方法在$[0,1]$上给定$f(x)$：在康托集D上，$f(x)=0$处处成立；在第1秩的邻接区间上，即在$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$上，$f(x)=\frac{1}{2}$；在第2秩的邻接区间上，即在$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$与$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$上，$f(x)=\frac{1}{2^2}$；一般，在所有第$k$秩的邻接区间上，$f(x)=\frac{1}{2^k}$. 求函数$f(x)$的一切间断点.

此函数在集CD(康托集关于整个线段$[0,1]$的余集)上是否一致连续？

420. 证明，若函数$f(x)$在数轴上的有界集E上一致连续，则可把它在整个数轴上作连续延拓(即是说，有定义于全轴上的这样一个连续函数存在，使在E上处处有$\varphi(x)=f(x)$).

421. 举出一个函数$f(x)$的例子，使它在有界集E上连续且

有界，但不能在全轴上作连续延拓.

422. 证明，若函数$f(x)$在有界集E上连续，但非一致连续，则它不能在全轴上作连续延拓.

423. 设$f(x)$—— 在全轴上一致连续的函数. 证明，存在这样两个非负数A与B，使对于一切的x，$-\infty<x<+\infty$，有$|f(x)|\leqslant A|x|+B$.

424. 设$\chi_E(x)$——集E的特征函数. 证明，对于任意的集E，E_1,E_2；下列等式成立：

$$\chi_{E_1\cap E_2}(x)\equiv\chi_{E_1}(x)\chi_{E_2}(x),$$

$$\chi_{E_1\cup E_2}(x)\equiv\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)-\chi_{E_1}(x)\chi_{E_2}(x),$$

$$\chi_{CE}(x)=1-\chi_E(x).$$

425. 设$M=E_1\cap\cdots\cap E_n$，$N=E_1\cup\cdots\cup E_n$. 用$\chi_{E_1}(x)$，…，$\chi_{E_n}(x)$来表示$\chi_M(x)$与$\chi_N(x)$.

426. 证明，任何集E的特征函数在该集的边界点间断且在数轴上其余的一切点连续.

427. 证明，若$\varphi(x)$与$\psi(x)$在$[a,b]$上连续，则函数$F(x)=\max\{\varphi(x),\psi(x)\}$在$[a,b]$上也连续.

428. 证明，若$f(x)$——数轴上的连续函数，则函数

$$[f(x)]_{-a}^{a}=\begin{cases}f(x), & \text{若} -a\leqslant f(x)\leqslant a,\\ a, & \text{若 } f(x)>a,\\ -a, & \text{若 } f(x)<-a,\end{cases}$$

在数轴上也处处连续. 这里a——已给正数.

429. 设函数$f(x)$在数轴上处处有定义. 证明，要$f(x)$在一切点连续的必要且充分条件为：对于任意的$a>0$，函数$[f(x)]_{-a}^{a}$在一切点连续.

430. 举一个给定在$[0,1]$上的函数$f(x)$之例子，它的连续点的集与间断点的集都是在$[0,1]$上处处稠密且在任何的开区间

$(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$内具有连续统的势.

431. 用下面的方法在正方形$[0, 1] \times [0, 1]$上给定函数$f(x, y)$:

在集A的点上$f(x, y)=0$(这里A——《谢尔宾斯基地毯》, 参阅习题316);

在一切去掉了的正方形之中心$f(x, y)=1$.

$f(x, y)$在由任何去掉的正方形之对角线所分成的四个三角形中的每一个内为线性的.

函数$f(x, y)$在正方形$[0, 1] \times [0, 1]$内是连续的吗? 在集$E=\{[0, 1] \times [0, 1]\} \backslash A$上它是连续的吗? 它在$E$上是否一致连续?

432. 在正方形$[0,1] \times [0,1]$上给出函数$f(x, y)$:

在集A的点$f(x, y)=0$(这里A——《谢尔宾斯基地毯》);

在第n步所去掉的一切正方形之中心$f(x, y)=\frac{1}{n}$;

$f(x, y)$在由任何去掉的正方形被其自己的对角线所分成之四个三角形中的每一个内为线性的.

函数$f(x, y)$在正方形$[0, 1] \times [0, 1]$内是否连续? 在集$E=\{[0, 1 \times [0, 1]\} \backslash A$上呢? 在正方形内它是否一致连续? 在集$E$上呢?

433. 函数$z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$在开集$0<x^2+y^2<4$(去掉圆心的开圆)内连续; 在所指出的集内此函数是否一致连续? 在开圆环$1<x^2+y^2<4$内它是否一致连续?

434. 作出一个在Ox轴上的一切点有导数的函数, 且此导数在原点间断, 且在原点的任何邻域内无界.

435. 在线段$[0, 1]$上作出在一切点有导数的函数, 并且该导数在已给无处稠密的非空完备集上间断.

436. 在线段$[0, 1]$上作出在一切点有导数的函数，并且该导数在某正测度集的任何点之任意邻域内无界.

437. 在一切点导数存在且此导数与迪里赫列函数重合的函数$f(x)$是否存在(即是说，在有理点$f'(x)=1$，在无理点$f'(x)=0$)？

438. 函数$f(x)$在数轴上一切点有导数. 导数$f'(x)$能否是间断而且单调的？

439. 设函数$f(x)$在线段$[a, b]$的一切点之右导数，左导数都存在. $f'_{左}(x)$取得一切中间值(即是说，具有达布性质)，这正确吗？

440. 作出在全轴上连续且除了已知有界可数集E的点以外，在一切点都有导数的函数(在E中的点导数不存在).

441. 设A——在直线H_1上的任意非空集. 函数$\rho(x, A)$是否为x的连续函数？

442. 在直线上已给两个不相交的闭集E与F. 作出在集E的一切点等于1，又在集F的一切点等于0，而在全轴上连续的函数$f(x)$.

443. 在直线上已给n个两两互不相交的闭集$E_1, E_2, \cdots, E_n$；作出在直线上处处连续的函数$f(x)$且使得对任何的k，$1\leqslant k\leqslant n$，当$x\in E_k$时，$f(x)=p_k$成立(这里$p_1, p_2, \cdots, p_n$——已知数).

444. 在直线上已给可数个两两互不相交的闭集E_k，并且这些集中任何一个也不包含所有其余集之和集的接触点. 作出在直线上处处连续的函数$f(x)$，且使得对任何自然数k，当$x\in E_k$时，$f(x)=p_k$成立(这里p_k——已知数，它们合条件：级数$\sum\limits_k p_k$绝对收敛).

445. 在直线上已给可数个两两互不相交的闭集E_k，并且E_1包含其它集之和集的接触点. 设$\sum\limits_k p_k$——绝对收敛级数，其中一切的$p_k\neq 0$. 证明，不存在全轴上这样的连续函数$f(x)$：对于任意

的自然数 k, 当 $x\in E_k$ 时, 有 $f(x)=p_k$.

446. 叙述并解答 441—445 题, 若在它们的条件中假定集 A, $E, F, E_1, \cdots, E_n, \cdots$ 不是在直线上给定的, 而是在任意度量空间 R 内给定(特别是, 在平面上或三维欧氏空间内).

447. 作出在全轴上有定义, 在点 x_0 相对于康托集 D 为连续的函数, 但在该点非完全连续.

448. 下述断言: 《若 $f(x)$ 在点 x_0 相对于包含点 x_0 的任何可数集为连续, 则它在该点完全连续》是否正确?

449. 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在点 $M_0(x_0, y_0)$ 与其某个邻域内. 下述断言: 《函数 $f(x, y)$ 在点 M_0 为完全连续的必要充分条件是: 它沿着从点 M_0 引出的任何半直线是连续的》是否正确?

450. 设函数 $f(x, y, z)$ 定义在整个三维空间 H_3, 并且在坐标原点相对于经过坐标原点的任何平面连续; 可否断言, 该函数在坐标原点完全连续?

451. 设函数 $f(x, y)$ 在平面上处处有定义, 且在点 $(0, 0)$ 相对于任意的阿几米德(Archimedes)螺线 $\rho=a(\varphi-\alpha)$ 连续(对于任意的常数值 $a>0$ 与 α). 可否断定, 该函数在点 $(0, 0)$ 完全连续?

第十章 连续映射

迄今 (在第 9 章内) 我们用记号 $y=f(x)$ 表示定义在 n 维欧氏空间内的 (或者, 特别是在数轴上) 连续且取数值的函数. 这里我们给出连续函数这个概念的某一个拓广.

设 $y=f(x)$——欧氏空间 H_n 的某个集 E 到欧氏空间 H_m 的映射. 若对任意的 $\varepsilon>0$, 可找到这样的邻域 $V_\delta(x_0)$, 使对一切的 $x\in E\cap V_\delta(x_0)$, 包含式: $f(x)\in V_\varepsilon(y_0)$ 成立 (这里 $y_0=f(x_0)$), 则称这个映射为在点 $x_0\in E$ 相对于 E 的

连续映射. 容易知道，连续函数的许多性质对于连续映射也成立:

1) 若 E——有界闭集并且映射 $y=f(x)$ 在集 E 的一切点相对于 E 连续，则集 E 的像(即是说 $f(E)$)在空间 H_m 内有界.

2) 若映射 $f(x)$ 在有界闭集 E 上相对于 E 连续，则此映射在 E 上一致连续①.

集 $E(E\subset H_n)$ 到集 $E_1(E_1\subset H_m)$ 的连续映射可用 m 个 n 元的连续函数来解析地给出:

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2=\varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=\varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{cases}$$

这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$——数性变量(点 x 的坐标)，而 $y_1, y_2, \cdots, y_m$——点 y 的坐标.

例如，函数

$$y_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}; \qquad y_1=\begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}, & \text{当 } x_1\neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } x_1=0,\ x_2>0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x_1=0, x_2<0. \end{cases}$$

实现了平面 Ox_1x_2 的半圆环 E(图 2)到平面 Oy_1y_2 的矩形 E_1 的连续映射.

图 2

① 映射 $f(x)$ 定义在 $E\subset H_n$ 上，若对任意的数 $\varepsilon>0$，存在这样的 $\delta>0$，使对任何的 $x'\in E$ 及 $x''\in E$，只要 $\rho(x', x'')<\delta$，则 $\rho(f(x'), f(x''))<\varepsilon$ 即成立，则称映射 $f(x)$ 在 E 上一致连续.

曲线. 若 E——数轴上的线段，则该线段在欧氏空间 H_m 内的连续映像称为在 H_m 中的曲线. 例如，方程 $y_1=\cos x_1$, $y_2=\sin x_1$ 把线段 $0\leqslant x_1\leqslant 2\pi$ 映射成为 Oy_1y_2 平面内的单位圆周.

利用皮亚诺(G. Peano)曲线给出的映射是连续映射的重要例子. 这里所指的是这样的连续映射 $y_1=\varphi(t)$, $y_2=\psi(t)$, 对于这个映射，线段 $E(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的像为 Oy_1y_2 平面上的闭正方形 $0\leqslant y_1\leqslant 1$, $0\leqslant y_2\leqslant 1$. 这种的连续映射的存在是在 1890 年被皮亚诺所证明（在下面的习题 465 中举出了这种连续映射的例子).

射影. 我们再来研究连续映射的一个方法——把平面上的集射影到轴上.

经过点 M 与 Ox 轴成已知角 α 的直线同 Ox 轴的交点称为点 $M\in Oxy$ 在 Ox 轴上的射影.

集 E 的一切点在 Ox 轴上的射影所成之集称为集 $E\subset Oxy$ 在 Ox 轴上的射影；这时集 E 的一切点是按与 Ox 轴成同一个角度 α 来进行射影的.

集按与轴成 90° 的角度的射影称为正交(或直角)射影.

非按直角所作集的射影称为斜角射影.

集的算术和. 为了解决某些问题，我们需要集的算术和这个概念.

设 E 与 F 为数轴上的两个集；$x+y\,(x\in E,\ y\in F)$ 这种形状的一切可能的和所成之集称为 E 与 F 这两个集的算术和. 集 E 与 F 的算术和记为 $E\oplus F$.

例如，闭区间 $[1,2]$ 与开区间 $(4,6)$ 的算术和为开区间 $(5,8)$

习　题

452. 证明，有界闭集的连续映像为有界闭集.

453. 设 $y=f(x)$——欧氏空间 H_n 到欧氏空间 H_m 的连续映射. 证明，任意闭集的原像为闭集.

454. 证明，对于相同的条件，空间 H_m 的任意开集 G 的原像为开集.

455. 证明，若对于空间 H_n 到平面 H_2 的映射 $y=f(x)$，一切开圆的原像为开集，则映射 $y=f(x)$ 为连续映射.

456. 证明，若对于空间 H_n 到平面 H_2 的映射 $y=f(x)$，一切闭集的原像为闭集，则映射 $y=f(x)$ 为连续映射.

457. 设 $f(x)$——集 $E\subset H_n$ 到集 $H_1\subset H_m$ 的映射. 证明，$f(x)$ 在点 $x_0\in E$ 连续的必要充分条件为：对于集 E 中收敛于 x_0 的任意序列 $\{x_k\}$（即是说，当 $k\to\infty$，$\rho(x_k,x_0)\to 0$），有等式 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=f(x_0)$（即当 $k\to\infty$ 时，$\rho(f(x_k),f(x_0))\to 0$）.

458. 设 $y=f(x)$ ——集 E 到集 E_1 上的一对一的连续映射. 集 E_1 到 E 的逆映射是否必定是连续的？若是——证明之，若不是——举出例子.

459. 设 $y=f(x)$ ——有界闭集 E 到集 E_1 上的一对一的连续映射. 证明，集 E_1 到 E 的逆映射连续.

460. 设 $y=f(x)$——无界闭集 E 到 E_1 上的一对一的连续映射. 逆映射是否必定是连续的？若不是——举出例子.

461. 设 $y=f(x)$——集 E 到 E_1 上的一对一的连续映射. 证明，若 E 无孤立点，则 E_1 也无孤立点. 若 $f(x)$——连续，但非一对一的映射，这个论断是否仍为有效？

462. 下述论断：《设 $y=f(x)$——集 E 到 E_1 上的连续映射，又设 E_1 无孤立点，则 E 也无孤立点》是否正确？若 $f(x)$——E 到 E_1 上的一对一的连续映射，类似的论断是否正确？

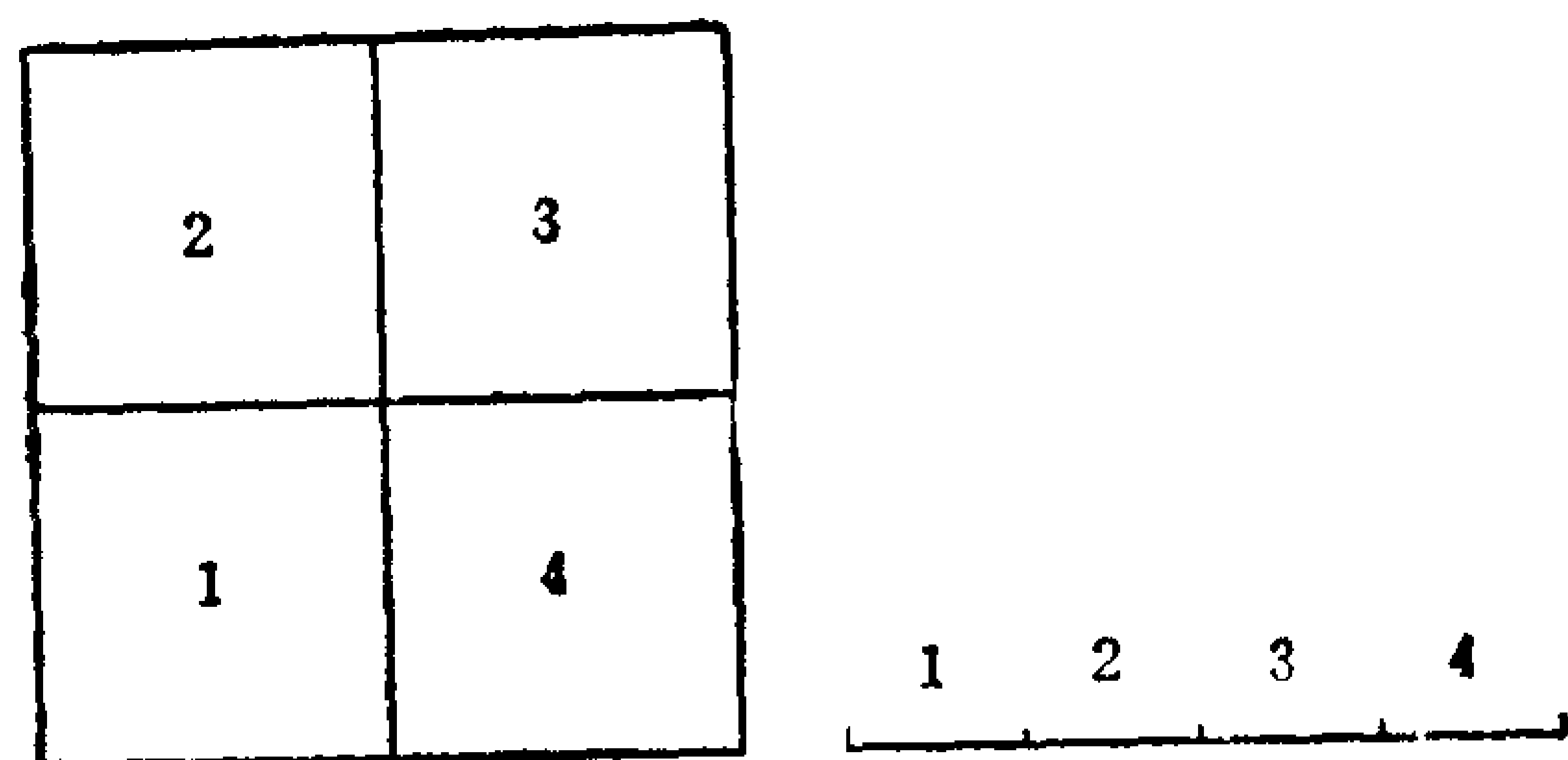
463. 设 $y=f(x)$——E 到 E_1 上的一对一的连续映射；E——H_n 内的有界闭集. 证明，若 E_1 无孤立点，则 E 也无孤立点.

464. 证明，不存在闭区间 $[0,1]$ 到闭正方形

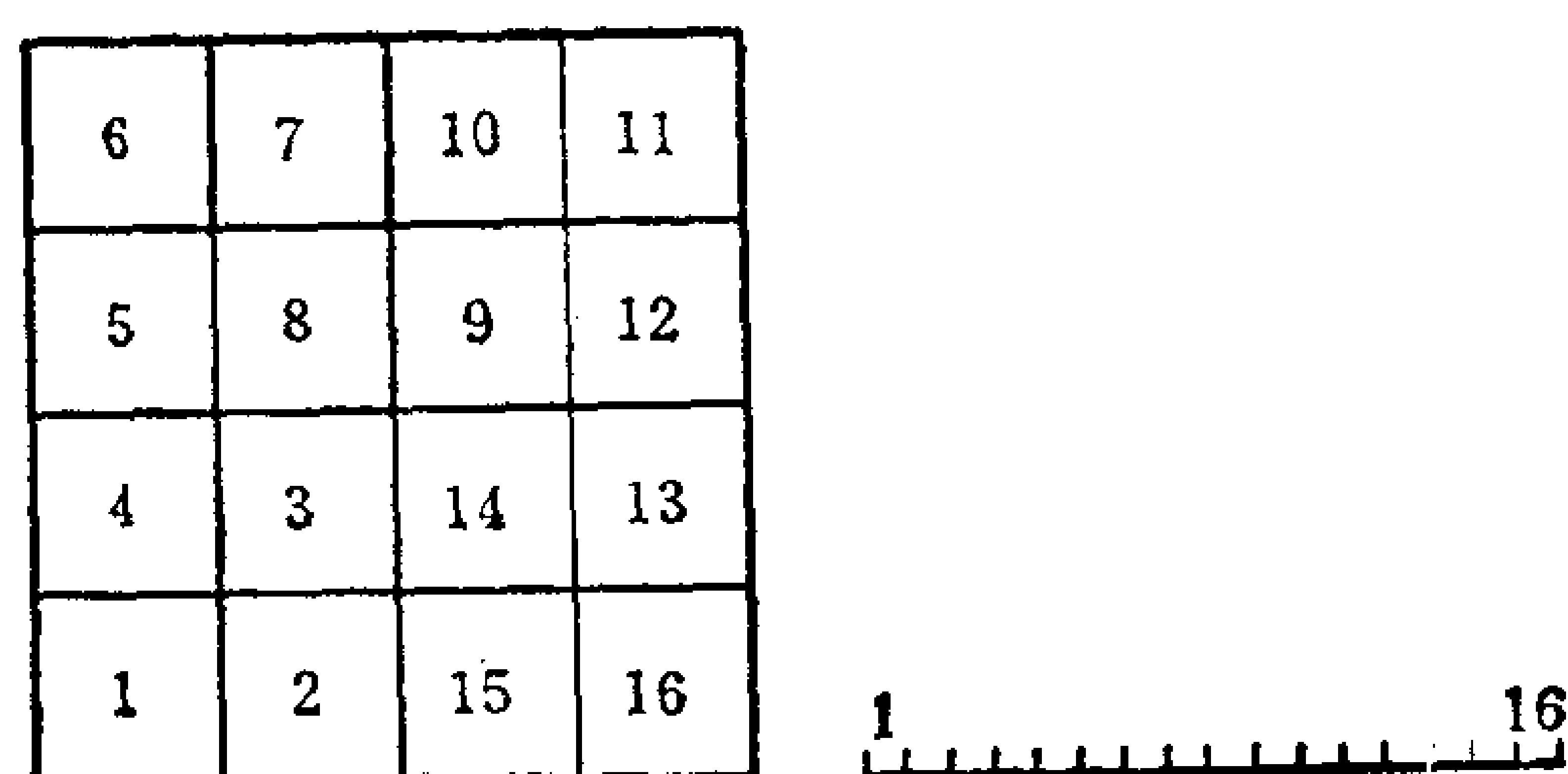
$$[0,1]\times[0,1]$$

上的一对一的连续映射.

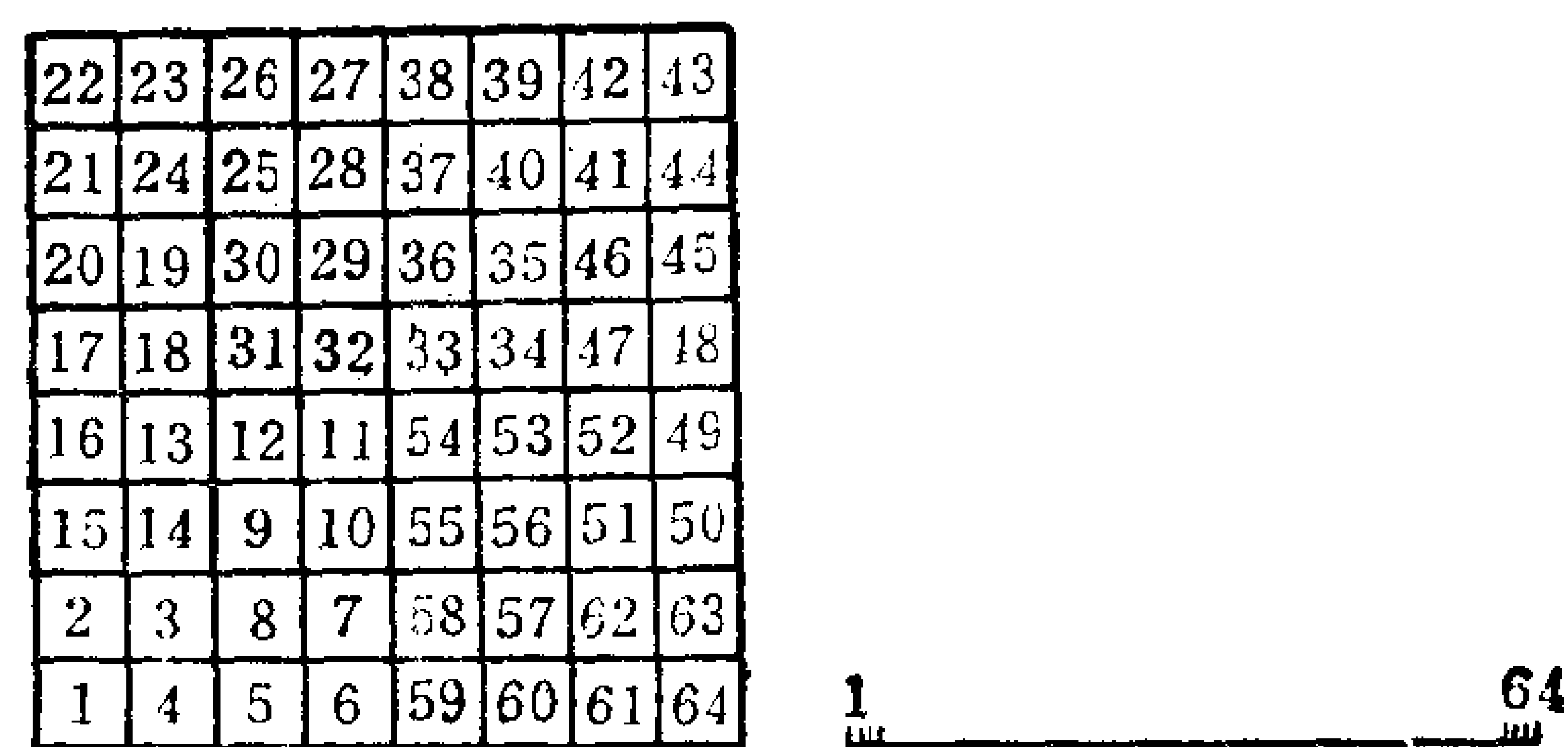
465. 设 $M=f(t)$——Ot 轴上的线段 $[0,1]$ 到 Oxy 平面的整个正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续映射（《皮亚诺曲线》）. 这个映射可用以下的方法来实现. 我们把线段 $[0,1]$ 等分为四个第一秩的闭



(a)



(b)



(c)

图 3

区间，分已给的正方形为四个相等的第一秩闭正方形；第一秩的闭区间从左到右来编号，而第一秩的正方形按图 3(*a*) 所示的顺序来编号．其次，每一个第一秩的闭区间等分四个第二秩的闭区间，而每一个第一秩的正方形等分为四个第二秩的正方形；所得 16 个第二秩闭区间从左到右来编号，而第二秩的正方形可这样来编号，使号码相邻的二个正方形有公共边（例如图 3 (*b*)中所示的那样）．再

次，分每一个第二秩闭区间为四个第三秩的闭区间且按从左到右来对第三秩的闭区间进行编号，而每一个第二秩的正方形分为四个第三秩的正方形，且所有第三秩正方形的编号按与第二秩正方形相同的法则去进行(如图 3(c)所示)．再其次，将这个过程无限继续进行下去．

使每一个号码为 i 的第 n 秩闭区间与号码为 i 的第 n 秩正方形相对应，这样我们建立了同秩的闭区间与正方形之间的一一对应；注意，这个对应具有以下的性质：若第 n 秩闭区间 δ_1 对应于第 n 秩正方形 V_1，而第 $n+1$ 秩闭区间 δ_2 对应于第 $n+1$ 秩正方形 V_2，且若 $\delta_1 \supset \delta_2$，则有 $V_1 \supset V_2$.

现在，用下述方法建立 Ot 轴的线段[0, 1]到已给正方形的映射．设 t_0——线段[0, 1]的任一点．作包含点 t_0 的闭区间序列：δ_1(第一秩)，δ_2(第二秩)，…，δ_n(第 n 秩)，…，这个序列对应于正方形序列 V_1，V_2，…，V_n，…；同时，因为 $\delta_1 \supset \delta_2 \supset \cdots \supset \delta_n \supset \cdots$，则 $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots$．因为当 $n \to \infty$ 时，V_n 的直径→0，所以存在属于一切 V_n 的唯一点 M_0．我们使它与点 t_0 对应．

可以证明(参阅：例如福罗洛夫(Н. А. Фролов)，实变函数论，1961，114—116 页)：a)每一点 $t_0 \in [0, 1]$ 仅有已给正方形中的一点①M_0 与之对应；б)在这个映射下得到正方形的一切点(虽然正方形中的某些点 M，它在线段中的原像不止一个点 t，换言之，已给映射不是一对一的)；в)此映射 $M=f(t)$ 在一切点 $t \in [0,1]$ 连续．

---

① 问题在于，若 t_0——[0, 1]线段上的二进位有理点，则有包含该点的两个相异的闭区间序列：$\delta_1 \supset \delta_2 \supset \cdots \supset \delta_n \supset \cdots$ 与 $\delta_1' \supset \delta_2' \supset \cdots \supset \delta_n' \supset \cdots$；它们对应两个不同的正方形套序列：$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots$ 与 $V_1' \supset V_2' \supset \cdots \supset V_n' \supset \cdots$．为了要证明点 t_0 仅对应一点 M_0，必须证明 $\bigcap_n V_n = \bigcap_n V_n'$．应当指出，在所引福罗洛夫的书中，这个事实未给出证明；建议读者自行证明．

也应指出，在该书 115 页(2—3 行)有一个印刷上的错误：《至少有一个公共点》；应当读为：《有公共边》．

证明，在这个映射下，属于正方形$[0,1]\times[0,1]$的任意铅直闭区间$I(x=x_0, 0\leqslant y\leqslant 1)$的原像为$Ot$轴的线段$[0, 1]$上的完备集.

466. 利用前题结果，证明线段$[0,1]$可表为两两无公共点的c(连续统的势)个完备集的和.

467. 在习题465中构造的皮亚诺曲线是否为封闭曲线(即是说，等式$f(0)=f(1)$成立吗)?

468. 作出三维的皮亚诺曲线(即是说，求闭区间$[0,1]$到闭立方体$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$的连续映射).

469. 证明，Oxy平面上的集E在Ox轴上的投影法为连续映射.

470. 平面上的开集在Ox轴上的投影是否恒为直线上的开集?

471. 平面上的闭集在Ox轴上的投影是否恒为直线上的闭集?

472. 在平面上已给两条相交的轴. 证明，每一个不可数集至少在这二轴之一上的垂直投影为不可数集.

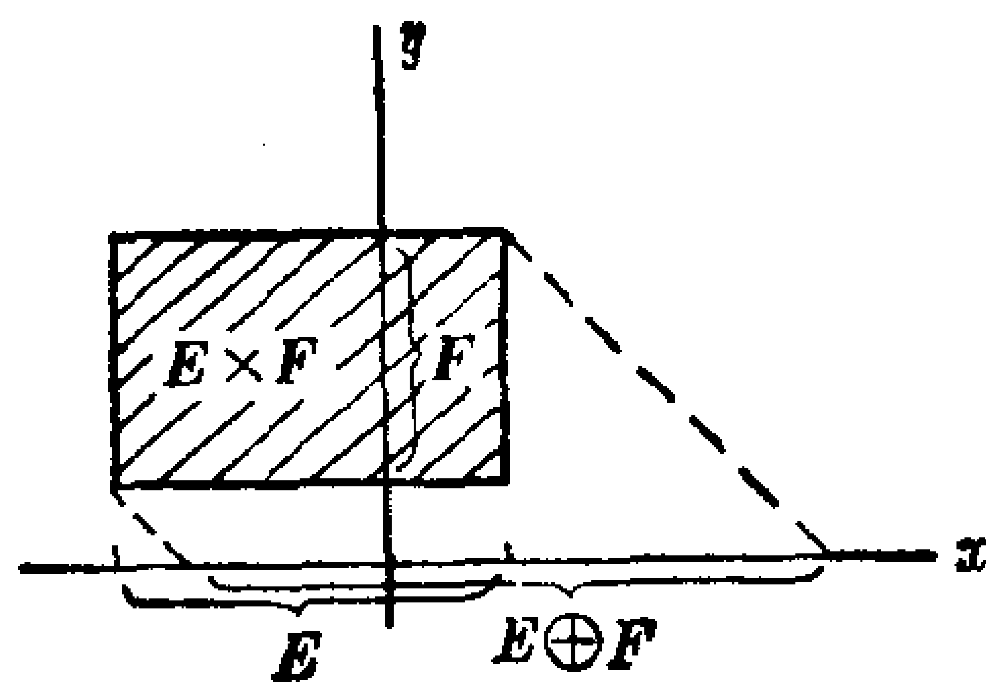


图 4

473. 证明，集E与F的算术和(即是说，集$E\oplus F$)可用下述方法来作出：把集E放置在Ox轴上，F——在Oy轴上，且在Oxy平面上作出集$E\times F$；然后将$E\times F$往Ox轴上作斜角射影(射影角等于135°)；所得之投影即为集$E\oplus F$(图4).

474. 证明，两个有界闭集之算术和为有界闭集.

475. 两个康托完备集的算术和是什么?

476. 证明，若直线上的集A是开的，则无论怎样的集B，算术和$A\oplus B$为开集.

477. 设E与F——直线上的两个集. 研究形状为$\rho(\zeta,\eta)$的一切数所成之集S,这里$\zeta\in E$, $\eta\in F$. 证明, S可用下述方法来作出: 把集E放置在Ox轴上, F——在Oy轴上,且取乘积$E\times F$. 然后将$E\times F$往Ox轴上作斜角射影(与Ox轴成45°的角). 此射影在Ox轴的正的部分上者记为A,而在负的——记为B. 于是$S=A\cup B_1$,这里B_1——集B关于坐标原点的镜反射(图5).

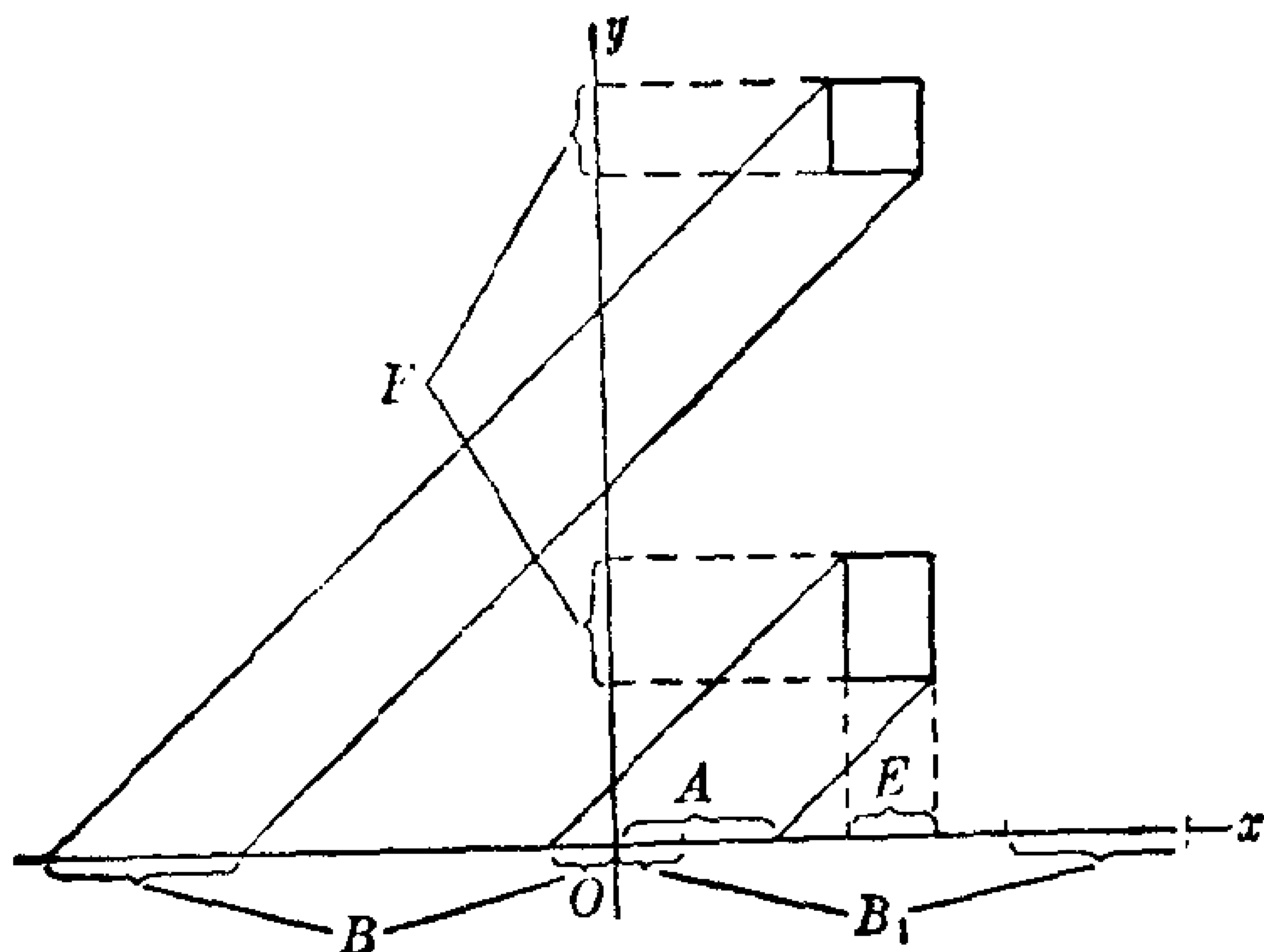


图 5

478. 设E与F——Ox轴上的两个有界闭集. 证明, 形状为$\rho(\zeta,\eta)$的一切可能的数所成之集也为Ox轴上的有界闭集, 这里$\zeta\in E$, $\eta\in F$.

479. 康托集的点与点之间的一切的距离所成之集是什么?

480. 设A——Ox轴上的开集, B——在同一个轴上的任意的集. 证明, 介于点$\zeta\in A$与$\eta\in B$之间的所有可能的距离所成之集或为开集, 或为开集与一点(坐标原点)之和.

第十一章　单调函数·有界变差函数

单调函数．一个实变量的函数 $f(x)$ 在集 E 上处处有定义，若对于任意的 $x_1\in E, x_2\in E$，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在集 E 上为增函数．若对于一切的 $x_1\in E, x_2\in E, x_1<x_2$，不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则函数称为严格增函数．

类似地可定义减函数与严格减函数．

若函数在集 E 上为增函数，或在集 E 上为减函数，统称它在 E 上是单调函数；类似地可定义严格单调的函数．

若函数在线段 $[a, b]$ 上是单调的，则它的间断点所成之集至多是可数的(参阅第三章中的 67 题)，并且它的一切间断点——第一类．

函数的变差．设函数 $f(x)$ 给定在 $[a, b]$ 上；用点 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$ 分 $[a, b]$ 为 n 段；此外，记 $a=x_0, b=x_n$．研究下面的和数：

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

这个和数依赖于闭区间 $[a, b]$ 的分法．若对于闭区间 $[a, b]$ 的一切可能的分法，此和数都不超过某一个正数，则说函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有有界变差(或有界变化)．这时对于 $[a, b]$ 的一切可能的分法，和数 σ 的上确界称为函数 $f(x)$ 的变差(或函数 $f(x)$ 的全变化)并记为 $\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}} f$：

$$\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}} f=\sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

这里的上确界是对线段 $[a, b]$ 的所有可能分法来取的．

若和数 σ 所组成的集是无界的，则函数 $f(x)$ 称为无界变差函数；这可利用符号等式：$\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}} f=+\infty$ 来表示．

具有有界变差的函数简称为有界变差函数．对于有界变差函数，不等式 $\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}} f<+\infty$ 成立．

有界变差函数的例子：1）任何在$[a,b]$上单调的函数（特别是，任何单调间断函数）；2）任何在$[a,b]$上有有界导数的连续函数，等等.

应当指出，远非任何连续函数就有有界变差.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0\end{cases}$$

在闭区间$[0,1]$上连续，但在此闭区间上没有有界变差.

定理. 若函数在$[a,b]$上有有界变差，则它是两个单调增函数之差.

特别是，任何在$[a,b]$上的有界变差函数$f(x)$可表为下面的差

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$$

的形状. 这里 $\varphi(x)=\bigvee_a^x f$（函数$f(x)$在闭区间$[a,x]$上的变差），而 $\psi(x)=\bigvee_a^x f-f(x)$；$\varphi(x)$与$\psi(x)$为$[a,b]$上的增函数.

特别是，从上述定理推得，有界变差函数的间断点所成之集至多可数，并且这种函数的一切间断点都是第一类间断点.

里普希茨（Lipschitz）条件. 在线段$[a,b]$上已给函数$f(x)$，若存在这样一个常数$K>0$，使对于任意的$x_1\in[a,b]$，$x_2\in[a,b]$不等式

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant K|x_2-x_1|^{\alpha}$$

成立，（这里α——已给非负数），则称函数$f(x)$在线段$[a,b]$上满足α阶的里普希茨条件. 此不等式中的定数K称为里普希茨常数，而α——里普希茨指数.

容易看出，若函数在$[a,b]$上满足$\alpha>0$阶里普希茨条件，则它在$[a,b]$上处处连续.

可度长曲线. 平面上坐标满足方程

$$\begin{aligned}x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t),\end{aligned}\tag{1}$$

的一切点所成之集称为平面曲线，这里$\varphi(t)$与$\psi(t)$——在Ot轴的任何的闭区间：

$$a\leqslant t\leqslant b$$

上有定义的两个连续函数. 方程组（1）称为曲线的参数方程.

若尔当(Jordan)所给出的这一曲线定义过于广泛：例如，存在这样的曲线 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$，它填满某个正方形的一切点(《皮亚诺曲线》，参阅第十章中的习题465)．但是，若对 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 加上某些限制，则我们得出更狭义的而又更自然的曲线类．由于可度长曲线的概念而得到若尔当曲线的一个缩小的曲线类．

设 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$——曲线 L 的参数方程式：这里 φ 与 ψ——定义在闭区间 $[a,b]$ 上关于 t 的连续函数．

用点 t_i(这里 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$)划分线段 $[a, b]$．所有线段 $[t_{i-1}, t_i]$ 的最大长度称为这个分法的模数．Ot 轴上的每一点 t_i 对应曲线上坐标为 $\varphi(t_i)$, $\psi(t_i)$ 的点 M_i．用折线 $M_0M_1M_2\cdots M_{n-1}M_n$ 连接这些点，且用 $l_{折}$ 表示它的长．如当分法的模数趋于零时，折线的长 $l_{折}$ 有有限的极限存在，则此极限称为曲线弧的长，而此曲线弧本身称为在 $a\leqslant t\leqslant b$ 对应的那一段是可度长的．

我们现在给出弧长 l 的精确定义：若对任意的 $\varepsilon>0$，存在这样的 $\delta>0$，使对线段 $a\leqslant t\leqslant b$ 的任何分法，当它的模数小于 δ 时，不等式

$$|l_{折}-l|<\varepsilon$$

成立，则数 l 称为已给弧的长．

我们举出关于弧可度长的一些准则．

定理 1． 曲线弧可度长的必要充分条件为：内接于该弧的折线之长度所成集为有界的数集．这时弧长 l 与内接折线长的上确界相重合：

$$l=\sup l_{折}.$$

定理 2． 弧 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 对应于 $a\leqslant t\leqslant b$ 的一段可度长的必要充分条件为：函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 在 $[a, b]$ 上二者都有有界变差．

习　　题

481． 设 $\varphi(t)$——在 $[a,b]$ 上的增函数；设 $f(x)$——在 $[A,B]$ 上的单调函数，这里 $A=\varphi(a)$, $B=\varphi(b)$．$f[\varphi(t)]$ 是否为单调函数？

482． 考虑前题中的单调函数 $\varphi(t)$ 与 $f(x)$．设 $\varphi(t)$——在

点 $t_0(a<t_0<b)$ 的间断函数. $f[\varphi(t)]$ 是否必为间断函数?

483. 证明，若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上严格单调，又若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(b)$，这里 $x_n\in[a,b]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$.

484. 证明，若 $f(x)$——在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则函数

$$m(x)=\inf_{z\in[a,x]} f(z) \quad 及 \quad M(x)=\sup_{z\in[a,x]} f(z)$$

在 $[a,b]$ 上单调且连续.

485. 证明，若 $f(x)$——给定在 $[a,b]$ 上的任意增函数，则上面所定义的函数 $M(x)$(参阅 484 题)与 $f(x)$ 重合. 若用等式

$$\widetilde{M}(x)=\sup_{z\in[a,x)} f(z)$$

来定义 $\widetilde{M}(x)$，则 $\widetilde{M}(x)$ 在它的间断点可能不与函数 $f(x)$ 重合.

486. 证明，若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义而且单调，又若它取得线段 $[f(a), f(b)]$ 中所有的数作为它的值，则它在 $[a, b]$ 上连续.

487. 设在集 $E\subset[a,b]$ 上给定的有界函数 $f(x)$ 满足条件：对于一切的 $x_1\in E, x_2\in E, x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$；在整个线段 $[a,b]$ 上可否对它补充定义，使得在整个线段上它是单调的?

488. 设在集 $E\subset[a, b]$ 上给定的无界函数 $f(x)$ 满足：对于一切的 $x_1\in E$ 及 $x_2\in E$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. 可否将它延拓到整个闭区间 $[a,b]$ 上，使它在整个闭区间上是单调的?

489. 证明，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则反函数存在的必要充分条件是：$f(x)$ 是严格单调的(函数 $y=f(x)$ 定义在 E 上且取值在 E_1 上，若对每一个 $y_0\in E$ 存在一个而且仅有一个 $x_0\in E$，使 $f(x_0)=y_0$，则说函数 $y=f(x)$ 有反函数).

490. 两个单调函数的和可否是非单调函数? 举出适当的例子.

491. 举出这样一对增函数的例子，它们的乘积非单调的.

492. 举出一个定义在整个数轴上且在一切有理点(且仅在这些点)间断的严格单调函数的例子.

493. 证明，对于Ox轴上的任意可数点集，可作出单调增函数，其间断点的集为已给的可数集.

494. 在线段[0,1]上作出康托完备集D. 用下述方法给定函数$\tau(x)$：在第一秩①的邻接区间上$\tau(x)=\frac{1}{2}$；在第二秩的邻接区间上：$\tau(x)=\frac{1}{2^2}$（在靠左的区间上）又$\tau(x)=\frac{3}{2^2}$（在靠右的区间上）；一般在第k秩的邻接区间上：在第k秩的第一个区间上(设从左往右移动)$\tau(x)=\frac{1}{2^k}$，在第k秩的第二个区间上：$\tau(x)=\frac{3}{2^k}$，在第三个上：$\tau(x)=\frac{5}{2^k}$，等等；在第k秩的最后一个区间上：$\tau(x)=\frac{2^k-1}{2^k}$. 因此，函数$\tau(x)$在整个$CD$(即$D$对于闭区间[0,1]的余

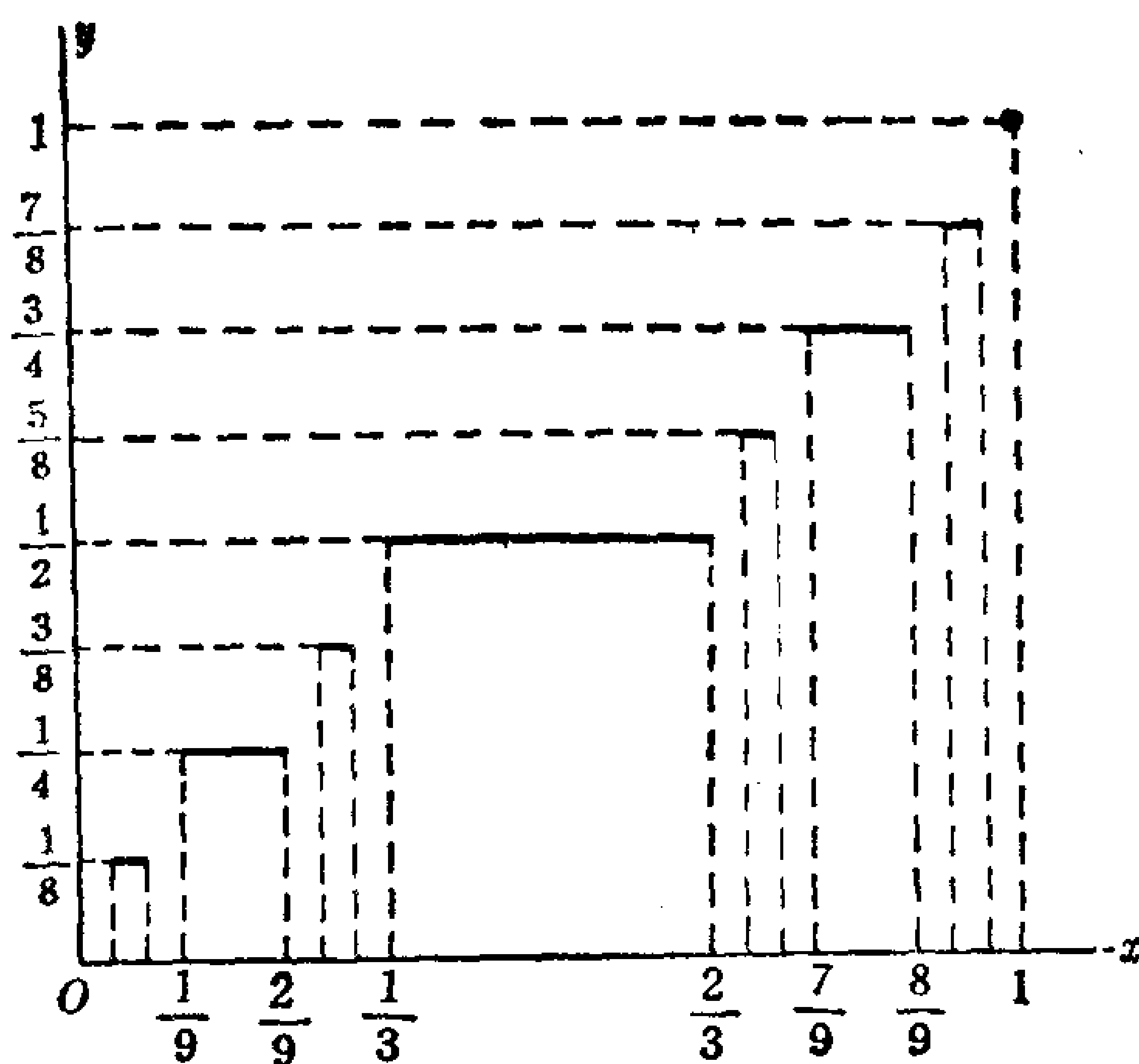


图 6

① 康托集的长为$\frac{1}{3^k}$的那些邻接区间我们称为第K秩的区间.

集)上有定义．它在 CD 上单调，而且它的值所成之集在$[0,1]$上处处稠密(函数 $\tau(x)$ 在 CD 上的值为介于 0 与 1 之间的一切二进位有理数)．

现在给函数在 D 上补充定义，对于 $x\in D$，令 $\tau(x)=\sup\limits_{\xi<x;\xi\in CD}\tau(\xi)$ (即是说，取此函数在集 CD 位于 x 左侧一部分中之函数值的上确界作为它在点 $x\in D$ 的值)．此外，假定 $\tau(0)=0$，在整个$[0,1]$上我们定义了函数 $\tau(x)$．这个函数称为康托函数(此函数的简略图形请参阅图 6)．

证明，$\tau(x)$——在线段$[0,1]$上一切点连续的单调增函数．

495. 在线段$[a,b]$上异于常数的单调连续函数可否有在定义域内几乎处处等于零的导数(任何一个性质，若在集 E 上除去一个测度为零的子集的点以外，在该集的一切其余的点都满足，则称这个性质《在集 E 上几乎处处》成立)．

496. 证明，若函数 $f(x)$在有限开区间(a,b)上单调，有界且连续，则它在此开区间上一致连续．

497. 若把上题中的有限开区间(a,b)改为无穷开区间$(-\infty,+\infty)$，则结论是否正确？

498. 设$f(x)$——定义在$[0,1]$上的任意的连续函数；设ε——任意的正数．证明，存在有定义于$[0,1]$上的这样一个连续函数 $\varphi(x)$：a) $\varphi(0)=f(0)$；$\varphi(1)=f(1)$；б) $\varphi'(x)=0$ 在$[0,1]$上几乎处处成立；в) 对于一切的 $x\in[0,1]$，有不等式 $|\varphi(x)-f(x)|<\varepsilon$ 成立．

499. 设 E——位于闭区间$[a,b]$上无处稠密的正测度闭集．在这个闭区间上作出严格增的函数 $f(x)$，它在此闭区间$[a,b]$上处处有连续导数，且在集 E 的一切点 $f'(x)=0$．

500. 若在上题中把 E 为无处稠密集的要求取消，这个问题有解吗？

501. 证明，若 $f(x)$——单调函数，对于一切的 x 与 y，它满足等式 $f(x)+f(y)=f(x+y)$，并且 $f(1)=a$，则 $f(x)\equiv ax$.

502. 函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变差等于 A. 函数 $y=k\cdot f(x)+m$ 的变差等于什么？

503. 函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0,\\ 1-x, & \text{当 } 0<x<1,\\ 5, & \text{当 } x=1\end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上的全变差等于什么？

504. 函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{对于 } x<1,\\ 10, & \text{对于 } x=1,\\ x^2, & \text{对于 } x>1\end{cases}$$

在闭区间 $[0,2]$ 上的全变差等于什么？

505. 若改变上题中函数在间断点（当 $x=1$）的值，则函数的变差就发生改变. 如何改变该函数在点 $x=1$ 处的值，使变差成为最小？

506. 证明，函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0,\\ x^2\cos\dfrac{\pi}{x}, & \text{当 } x\neq 0\end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上有有界变差.

507. 证明，函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0\end{cases}$$

在闭区间 $\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$ 上有无界变差.

508. 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有有界变差；证明，函数 $F(x)=f(ax+b)$（这里 $a>0$）在闭区间 $\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$ 上有有界变差，并且

$$\bigvee_0^1 f(x)=\bigvee_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1-b}{a}} F(x).$$

509. 推广上题的结果：求证，若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有有界变差，而 $\varphi(x)$——在 $[\alpha, \beta]$ 上严格增的这样一个连续函数，合 $\varphi(\alpha)=0$，$\varphi(\beta)=1$，则函数 $F(x)=f[\varphi(x)]$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有有界变差，并且

$$\bigvee_0^1 f(x)=\bigvee_\alpha^\beta F(x).$$

510. 证明，在线段 $[a,b]$ 上一切点有有界导数的函数为有界变差函数.

511. 证明，当且仅当集 $E\subset[a,b]$ 只有有限个边界点时，集 E 的特征函数 $\chi_E(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有界变差.

512. 有界变差连续函数的一致收敛级数之和是否一定是有界变差函数？

513. 证明，若函数在线段 $[a,b]$ 上满足 1 阶的里普希茨条件，则它在此线段上有有界变差.

514. 证明，在线段 $[a,b]$ 上满足 0 阶里普希茨条件的任何函数在该线段上为有界；又反之——在 $[a,b]$ 上的任何有界函数在该线段上满足 0 阶的里普希茨条件.

515. 证明，若函数 $f(x)$ 在线段 $[a, b]$ 上满足 $\alpha>1$ 阶的里普希茨条件，则 $f(x)$ 在该线段上为常数.

516. 证明，若函数 $f(x)$ 在线段 $[a, b]$ 上满足 α 阶的里普希茨条件，则它在该线段上也满足 β 阶的里普希茨条件，这里 β——小于 α 的任何非负数.

517. 设函数 $f(x)$ 在线段 $[a,b]$ 上满足 α 阶的里普希茨条件；

证明,函数$F(x)=K\cdot f(mx+n)$在线段$\left[\frac{a-n}{m},\frac{b-n}{m}\right]$(若$m>0$)或在线段$\left[\frac{b-n}{m},\frac{a-n}{m}\right]$(若$m<0$)上也满足$\alpha$阶的里普希茨条件.

518. 举出在线段$[a,b]$上的连续函数例子，它有有界变差且在该线段上不满足任何$\alpha>0$阶的里普希茨条件.

519. 举出在线段$[a,b]$上的连续函数例子，它在该区间上有无界变差且满足某个α阶的里普希茨条件（这里α——已知数，$0<\alpha<1$).

520. 举出在线段$[a,b]$上的连续函数例子，它有无界变差且在该线段上不满足任何$\alpha>0$阶的里普希茨条件.

521.1. 设$f(x)$——在$[a,b]$上的有界变差函数，且$f(x)\geqslant c>0$在$[a,b]$上处处成立．证明，函数$\frac{1}{f(x)}$在$[a,\ b]$上也有有界变差.

521.2. 设$f(x)$在$[a,b]$上有定义且$a<c<b$．证明等式:

$$\bigvee_a^b f=\bigvee_a^c f+\bigvee_c^b f.$$

522. 设$f(x)$——在$[a,\ b]$上的有界变差函数，$F(x)=\bigvee_a^x f$——函数$f(x)$在$[a,x]$这段上的变差.

证明定理：函数$f(x)$在点$x_0\in[a,\ b]$为连续的必要充分条件为：函数$F(x)$在点x_0连续.

523. 证明，若$f(x)$——在$[a,\ b]$上的有界变差间断函数，则$F(x)=\bigvee_a^x f$在$[a,b]$上也间断，并且两个函数的间断点是在同样的一些点，且在每一个间断点x_0，下列等式成立:

$$|f(x_0+0)-f(x_0)|=F(x_0+0)-F(x_0);$$

$$|f(x_0)-f(x_0-0)|=F(x_0)-F(x_0-0).$$

524. 表有界变差函数 $y=\cos^2x$（在线段$[0, \pi]$上）为两个增函数之差的形式.

525. 表$[0, 2\pi]$上的有界变差函数 $y=\sin x$ 为两个增函数之差的形式.

526. 表$[0,2]$上的有界变差函数

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & 当\ x\in[0,1),\\ 0, & 当\ x=1,\\ 1, & 当\ x\in(1,2]\end{cases}$$

为两个单调函数之差的形式.

527. 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 当\ 0\leqslant x<1,\\ 5, & 当\ x=1,\\ x+3, & 当\ 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间$[0, 2]$上的变差等于什么？验证 $\bigvee\limits_0^2 f=\bigvee\limits_0^1 f+\bigvee\limits_1^2 f$. 表$f(x)$为两个增函数之差的形式.

528. 证明，若函数在 $[a,b]$ 上有有界变差，则它的绝对值$|f(x)|$在这个闭区间上也有有界变差.

529. 下述论断：《若$|f(x)|$在$[a, b]$上有有界变差，则$f(x)$在这个闭区间上也有有界变差》正确吗？

530. 设$f(x)$——在 $[a, b]$ 上的连续函数. 下述论断：《若$|f(x)|$在$[a, b]$上有有界变差，则$f(x)$在此闭区间上也有有界变差》是否正确？

531. 证明定理：《函数$f(x)$在$[a,b]$上有有界变差的必要充分条件是：存在这样的一个增函数$\varphi(x)$，使对任意的$x\in[a,b]$与对任意的$h>0$（满足$x+h\in[a, b]$），下之不等式：$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\varphi(x+h)-\varphi(x)$成立》.

532. 证明，曲线

$$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & 当\ x\neq 0;\\ 0 & ,\ 当\ x=0\end{cases}$$

在[0, 1]上可度长.

533. 证明,曲线

$$y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & 当\ x\neq 0;\\ 0 & ,\ 当\ x=0\end{cases}$$

在[0, 1]上不可度长.

534. 证明,给定皮亚诺曲线的函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$不能有有界变差.

535. 研究由下列参数方程给定的曲线

$$x=\begin{cases}t\sin\dfrac{1}{t}, & 当\ t\neq 0,\\ 0 & ,\ 当\ t=0;\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}t\sin\dfrac{1}{t}, & 当\ t\neq 0,\\ 0 & ,\ 当\ t=0;\end{cases}$$

参数 t 取遍从 0 到 1 的值.

因为由这些参数方程给定的一对函数没有有界变差(参阅习题533),所以根据一般的定理2(参阅第 82 页)此曲线不可度长.从另一方面来说,由这些方程所确定的曲线是直线 $y=x$ 上从坐标为 (a, a) 的点到点 (b, b) 的线段,这里 $a=\min\limits_{0<t\leqslant 1}\left(t\sin\dfrac{1}{t}\right)$, $b=\max\limits_{0<t\leqslant 1}\left(t\sin\dfrac{1}{t}\right)$;但是,直线上的有限线段恒有有限的长.

出现的这一个矛盾说明了什么?

536. 证明,若 $f(x)$在[0, 1]上处处有在该区间为有界的导数,则函数 $y=f(x)$的图象是可度长曲线(当 $0\leqslant x\leqslant 1$).

537. 证明，若函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 在 $[0,1]$ 上处处有导数，并且 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 在 $[0,1]$ 上有界，则曲线 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 可度长（当 $0\leqslant t\leqslant 1$）.

第十二章 可测函数·黎曼（Riemann）积分与勒伯格（Lebesgue）积分

可测函数. $f(x)$ 为定义在集 E 上的函数（这里 E——欧氏空间 H_n 的子集，或在特别情况下，数轴的子集），若对任意的 a，$-\infty<a<+\infty$，集 E 以及一切的集 $E(f(x)>a)$ 都可测，则称函数 $f(x)$ 为可测的.

这里 $E(f(x)>a)$——E 中满足不等式：$f(x)>a$ 的一切点 x 所成之集. 记号：$E(f(x)\geqslant a)$，$E(f(x)<a)$，$E(f(x)\leqslant a)$，$E(f(x)=a)$，$E(a<f(x)<b)$ 等等有类似的意义.

给定在可测集 E 上的函数 $f(x)$ 为可测的必要充分条件为：一切 $E(f(x)\geqslant a)$ 是可测的，或一切 $E(f(x)<a)$ 是可测的，或一切 $E(f(x)\leqslant a)$ 是可测的.

1）若两个函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 皆可测，则它们的和，积，商皆可测.

2）若已给集 E 上的可测函数序列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 在 E 上处处收敛于函数 $F(x)$，则 $F(x)$ 在 E 上也可测. 甚至，若关系式 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=F(x)$ 非处处成立，而是在 E 上几乎处处[①] 成立，则 $F(x)$ 在 E 上可测.

3）若定义在 E 上的两个函数仅在测度为零的集上彼此相异，则它们二者或都可测，或都不可测.

仅在测度为零的集上彼此相异的函数称为是对等的.

4）若 $f(x)$ 在 E 上可测，又若可测集 A 为集 E 的一部分，则 $f(x)$ 在 A 上可测.

可测函数的例子.

1）在可测集 E 的一切点取常数值 C 的函数在 E 上可测.

2）在线段 $[a, b]$ 上的任何连续函数在此线段上可测.

---

① 我们回忆起，术语《某个性质在 E 上几乎处处成立》指的是，这个性质除了 E 的一个测度为零的某子集而外，在 E 上其它一切点都成立.

3）在线段$[a,b]$上几乎处处连续的函数在$[a,b]$上可测.

4）$[a,b]$上的连续函数所成之收敛序列的极限函数在$[a,b]$上可测.

不是任何函数都可测. 例如, 若 E——直线上的不可测集, 则在 E 上等于 1, 在 E 之外等于 0 的函数不可测.

黎曼积分. 设函数 $f(x)$给定在$[a, b]$上. 用点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 划分$[a,b]$, 并作和数:

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \text{ 与 } S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

这里

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

这些和数分别称为达布的下和与上和. 若当分法的模数 λ 趋于零[①]时, 达布上和与下和有共同的极限存在, 则此极限称为 $f(x)$在线段$[a,b]$上的黎曼积分:

$$(R)\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

若对于函数 $f(x)$在线段$[a,b]$上的达布下和与上和的极限都存在, 且这些极限彼此相等, 则说 $f(x)$在$[a, b]$上为黎曼可积.

定理. 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上为黎曼可积的必要充分条件是: 它在$[a,b]$上是有界的且它的间断点所成之集的测度等于零(即是说, 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上几乎处处连续).

黎曼积分的性质: 1）若 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$在$[a,b]$上黎曼可积, 则对任意的数 α,β 有等式成立:

$$\int_a^b[\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)]\,dx=\alpha\int_a^b\varphi(x)\,dx+\beta\int_a^b\psi(x)dx.$$

2）若 $f(x)$在$[a,b]$与在$[b,c]$上可积, 则它在$[a,c]$(这里 $a<b<c$)上可积, 并且$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$.

3）若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 在$[a,b]$上处处成立, 又 $f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积, 则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

① 各区间(x_{i-1},x_i)的长度之最大值: $\lambda=\max_i(x_i-x_{i-1})$称为分法的模数.

有界函数的勒伯格积分. 设 $f(x)$——定义在可测集[①] E 上的有界可测函数且取介于 A 与 B 之间的值：对于一切的 $x\in E$, $A<f(x)<B$. 用点 $A=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=B$ 划分 Oy 轴上的线段 $[A, B]$，且作以下的和数：

$$s=\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m e_i, \quad S=\sum_{i=1}^{n} y_i m e_i,$$

这里 $e_i=E(y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i)$. 这些和数分别称为勒伯格下和与上和. 各线段 (y_{i-1}, y_i) 的最大长度（对于已给分法）称为所给分法的模，并以 λ 表之.

若当分法的模 λ 趋于零时，勒伯格上和与下和有共同的极限存在，则称函数 $f(x)$ 在集 E 上为勒伯格可积，且勒伯格和数的这个共同的极限称为($f(x)$在集 E 上的)勒伯格积分：

$$(L)\int_E f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m e_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_i m e_i.$$

集 E 称为积分域. 特别是，若积分域为线段 $[a, b]$，则在此集上的勒伯格积分记为：

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)dx \quad 或 \quad (L)\int_a^b f(x)dx.$$

定理. 在集 E 上的任何有界可测函数 $f(x)$ 在此集上为勒伯格可积(假定 E——测度为有限的集).

勒伯格积分的性质. 1) 若函数 $f(x)$ 在线段 $[a, b]$ 上黎曼可积，则它在此线段上为勒伯格可积，并且这些积分彼此相等：

$$(R)\int_a^b f(x)dx=(L)\int_a^b f(x)dx.$$

因此，勒伯格积分是黎曼积分的推广.

2) 若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 在 E 上处处成立，则 $m\cdot mE\leqslant (L)\int_E f(x)dx\leqslant M\cdot mE$.

3) 若有有限测度的集 E 被分成有限个或可数个两两互不相交的可测集 $\{E_k\}$ 之和，则对于在 E 上的任何有界可测函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_E f(x)dx=\sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

(勒伯格积分的这个性质称为《完全可加性》).

4) 若 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在 E 上有界且可测，则对于任何常数 α 与 β，下式成

---

① 在这里以及今后(在本章内)我们都处处假定 E——具有限测度的可测集.

立:

$$\int_E(\alpha\varphi+\beta\psi)dx=\alpha\int_E\varphi dx+\beta\int_E\psi dx.$$

5) 若E上的两个有界可测函数 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$仅在测度为零的集上互异,即是说,若 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$在集E上互相对等,则它们的积分彼此相等:

$$\int_E\varphi(x)dx=\int_E\psi(x)dx.$$

6) 若f与φ在E上有界且可测,并且几乎处处 $f(x)\leqslant\varphi(x)$,则

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E\varphi(x)dx.$$

7) 若 $f(x)$——在E上的非负有界可测函数,并且$\int_E f(x)dx=0$,则$f(x)=0$在E上几乎处处成立.

8) 若 $f(x)$在E上有界且可测,则

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E|f(x)|dx.$$

9) 若已给E上的有界可测函数序列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$在$E$上几乎处处收敛于函数 $F(x)$, 且设存在这样的数A, 使对于一切的k, 有$|f_k(x)|\leqslant A$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E F(x)dx.$$

无界函数的勒伯格积分. 设 $f(x)$ 为符号一定的无界可测函数, 例如在E上处处 $f(x)\geqslant 0$. 作辅助函数$[f(x)]_t$ (用数t所作函数 $f(x)$的《切断》函数), 它由下面的方法来定义:

$$[f(x)]_t=\begin{cases}f(x), & \text{当 } 0\leqslant f(x)\leqslant t,\\ t, & \text{当 } f(x)>t.\end{cases}$$

这个函数可测且有界(可用t作为界).

非负无界函数 $f(x)$在集E上的勒伯格积分用下面的等式来定义:

$$(L)\int_E f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}(L)\int_E[f(x)]_t dx.$$

这里所指出的极限恒存在; 但它不一定等于有限数(它可以等于$+\infty$).

若$(L)\int_E f(x)dx$有限,则称函数$f(x)$在E上可和; 若这个积分为无穷,则称函数 $f(x)$为不可和.

变号无界可测函数 $f(x)$在E上的积分用下面的等式来定义:

$$(L)\int_E f(x)dx=(L)\int_E f_+(x)dx-(L)\int_E f_-(x)dx,$$

这里

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{当 } f(x)<0.\end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases}|f(x)|, & \text{当 } f(x)<0,\\ 0, & \text{当 } f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

若 $f_+(x)$ 与 $f_-(x)$ 二者可和，则称函数 $f(x)$ 可和，且 $f(x)$ 的积分等于有限数.

若非负函数 $f_+(x)$ 或 $f_-(x)$ 即使有一个不可和，则称函数 $f(x)$ 不可和.

无界函数的勒伯格积分的性质. 1) 若 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在 E 上可和，则对任意的数 α 与 β，函数 $\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$ 也可和，且

$$(L)\int_E[\alpha\cdot\varphi(x)+\beta\cdot\psi(x)]dx=\alpha\cdot(L)\int_E\varphi(x)dx+\beta\cdot(L)\int_E\psi(x)dx.$$

2) 若 $f(x)$ 在 E 上可和，且集 E 分成有限个或可数个两两互不相交的可测集 E_k 之和，则

$$(L)\int_E f(x)dx=\sum_k(L)\int_{E_k}f(x)dx$$

(勒伯格积分的《完全可加性》).

3) 若 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 E 上可和且 $f(x)\leqslant\varphi(x)$ 在 E 上几乎处处成立，则

$$(L)\int_E f(x)dx\leqslant(L)\int_E\varphi(x)dx.$$

4) 若 $f(x)$——在 E 上的可测函数，则从 $f(x)$ 可和导出 $|f(x)|$ 可和，而从 $|f(x)|$ 可和导出 $f(x)$ 可和；同时有以下的不等式成立

$$\left|(L)\int_E f(x)dx\right|\leqslant(L)\int_E|f(x)|dx.$$

5) 若在 E 上的两个可测函数在 E 上几乎处处彼此相等，则从其中之一个可和导出另一个可和，并且它们的积分彼此相等.

6) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上可测，并且不等式 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$ 在 E 上几乎处处成立，又若 $g(x)$ 在 E 上可和，则 $f(x)$ 在 E 上可和.

习　题

538. 证明，若 $f(x)$——在 E 上的可测函数，则 $[f(x)]^3$ 在 E 上也可测①.

539. 表明，从 $[f(x)]^2$——在 E 上的可测函数，尚不能推出 $f(x)$ 在 E 上可测.

540. 证明，若函数 $f(x)$ 在任意的线段 $[\alpha, \beta]$ 上可测，这里 $a<\alpha<\beta<b$，则它在整个闭区间 $[a, b]$ 上也可测.

541. 函数 $f(x)$ 在康托集与某个不可测集 E 的交集中的一切点等于 x^2，又在闭区间 $[0,1]$ 的一切其余的点等于 x^3，函数 $f(x)$ 可测吗？

542. 证明，若 $f(x)$ 在线段 $[a, b]$ 的一切点有导数，则此导数 $f'(x)$ 为线段 $[a, b]$ 上的可测函数.

543. 证明，若 E——直线上的可测集，则特征函数 $\chi_E(x)$ 可测．若 E——直线上的不可测集，则 $\chi_E(x)$——不可测函数.

544. 作出一个定义在全直线上，在一切点都间断，且具有下述性质的可测函数：不论怎样改变此函数在测度为零的任何集上的值，它都在直线上的一切点仍然是间断的.

545. 证明，若函数 $f(x)$ 在集 E 上可测，则函数 $[f(x)]_a^b$ 在 E 上也可测．在这里，记号 $[f(x)]_a^b$（其中 $a<b$）表示由下列等式所定义 x 的函数：

$$[f(x)]_a^b=\begin{cases} f(x), & \text{对于满足 } a\leqslant f(x)\leqslant b \text{ 的那些 } x, \\ b\ , & \text{对于满足 } f(x)>b \text{ 的那些 } x, \\ a\ , & \text{对于满足 } f(x)<a \text{ 的那些 } x. \end{cases}$$

---

① 原书是：证明，若 $[f(x)]^3$——在 E 上的可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上也可测．但这与后面的解答不符．为了前后一致，似应如上改正．（译者注）

546. 设 $\chi(x)$——有理数所成之集的特征函数. 证明，它同任意函数的相乘积为可测函数.

547. 证明，在$[a,b]$上的任何有界变差函数是$[a,b]$上的可测函数.

548. 设函数 $y=f(x)$在集 E 上可测. 设 E_1——Oy 轴上的任意开(或闭，或 F_σ 型，或 G_δ 型)集. 证明，集 E_1 的原像(在所有这些情形)为集 E 的可测子集.

549. 设函数 $y=f(x)$ 在集 E 上可测；设 E_1——Oy 轴上的任意可测集. 集 $f^{-1}(E_1)$是否必定是可测的?

550. 设函数 $y=f(x)$在集 E 上可测；设 E_0——集 E 的可测子集. 集 $f(E_0)$ 是否必定是可测的? 若不是——举出适当的例子.

551. 设 $x=\varphi(t)$——在集 E 上的可测函数；$E_1=\varphi(E)$——它的值所成之集. 设 $y=f(x)$——在 E_1 上的连续函数. 证明，这些函数的复合 $f[\varphi(t)]$为 E 上的可测函数.

552. 设 $x=\varphi(t)$——在线段 $E=[\alpha,\beta]$ 上的连续函数；$E_1=\varphi(E)$——它的值所成之集. 设 $y=f(x)$——在 E_1 上的可测函数. 这些函数的复合，即函数 $f[\varphi(t)]$是否必定可测. 若不是——举出适当的例子.

553. 证明，在$[a,b]$上的任何有界变差函数在$[a,b]$上为黎曼可积.

554. 在非空开集 $G\subset[a,b]$的一切点都间断的函数，它在$[a,b]$上能否是黎曼可积的?

555. 举例表明，从函数 $f(x)$在任意线段$[\alpha,\beta]$上的黎曼可积性，这里 $a<\alpha<\beta<b$，尚不能得出该函数在整个线段$[a,b]$上的可积性.

556. 证明，若$(R)\int_\alpha^\beta f(x)dx$ 对满足 $a<\alpha<\beta<b$ 的任意的 α

与β都存在，又若$f(x)$在$[a,b]$上有界，则$(R)\int_a^b f(x)dx$存在。

557. 证明，线段$[a,b]$上的黎曼可积函数所组成的一致收敛序列的极限为$[a,b]$上的黎曼可积函数. 证明，极限函数的积分等于已给序列的函数之积分的极限.

558. 下述论断：《若E——$[a,b]$上测度为零的集，则$\chi_E(x)$在$[a,b]$上黎曼可积》正确否？

559. 下述论断：《若E——$[a,b]$上的无处稠密集，则$\chi_E(x)$在$[a,b]$上黎曼可积》正确否？

560. 下述论断：《若E——$[a,b]$上测度为零的无处稠密集，则$\chi_E(x)$在$[a,b]$上黎曼可积》正确否？

561. 设E——线段$[a, b]$上测度为零的闭集. 函数$\chi_E(x)$在$[a,b]$上是否黎曼可积？

562. 下述论断：《若E——$[a,b]$上的集，它的闭包之测度为零，则$\chi_E(x)$在$[a,b]$上黎曼可积》正确否？

563. 在习题 395, 397, 398(当$c_n\to 0$), 403, 408 中的函数在线段$[0,1]$上是否为黎曼可积？

564. 证明，在习题 395, 397, 398(当$c_n\to 0$), 403, 408 中所研究的一切函数在线段$[0, 1]$上为勒伯格可积. 在这个线段上计算它们的积分.

565. 函数$f(x)$在康托集的点等于x^2，又在长为$\frac{1}{3^n}$的那些邻接区间上等于$\frac{1}{2^n}$. 计算$(L)\int_0^1 f(x)dx$.

566. 上题中的函数为黎曼可积吗？若是，则它的黎曼积分等于什么？

567. 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{在无理点,}\\ 1, & \text{在有理点}\end{cases}$$

在线段[0,1]上为黎曼可积吗？为勒伯格可积吗？在线段[0,1]上，它的积分等于什么？

568. 证明，若 E——在$[a, b]$上的可测集，则它的特征函数 $\chi_E(x)$ 在集 E 上为勒伯格可积，并且它的积分等于集 E 的测度：

$$(L)\int_a^b \chi_E(x)dx = mE.$$

569. 在线段[0,1]上作测度为$\frac{1}{2}$的无处稠密的完备集；此集的邻接区间按它们之长减小的顺序进行编号：(α_1,β_1)，(α_2,β_2)，$\cdots$，(α_n,β_n)，$\cdots$然后在[0,1]上给出函数 $f(x)$：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{在 } E \text{ 上;}\\ 1, & \text{在区间}(\alpha_n,\beta_n)\text{的中点;}\\ \text{在闭区间}\left[\alpha_n, \dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right]\text{及}\left[\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \beta_n\right]\text{上为线性的.}\end{cases}$$

此函数黎曼可积吗？它为勒伯格可积吗？在线段[0, 1]上它的勒伯格积分等于什么？

570. 设 $f(x)$——E 上的非负有界可测函数，又 E 中使 $f(x)\geqslant c$ 的那些点所成之集的测度等于 a. 证明，$(L)\int_E f(x)dx\geqslant ac$.

571. 函数 $f(x)$ 在康托集与某一个不可测集 E 的交之一切点等于 x^2，又在线段[0,1]的其余的点等于 x^3；函数 $f(x)$ 在集[0,1]上的勒伯格积分等于什么？

572. 若在康托集的点 $f(x)=10$，而在邻接区间上函数的图形是以这些邻接区间为直径所作圆周的上半圆. 计算函数 $f(x)$ 在线段[0,1]上的勒伯格积分.

573. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{对于大于}\frac{1}{3}\text{的无理点 } x;\\ x^3, & \text{对于小于}\frac{1}{3}\text{的无理点 } x;\\ 0, & \text{在有理点.}\end{cases}$$

计算$(L)\int_0^1 f(x)dx$.

574. 设集E是从闭区间$[0,1]$中去掉开区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right)$, $\cdots$, $\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right)$, $\cdots$而成. 计算函数 $y=3x^2$ 在集E上的勒伯格积分精确到0.01.

575. 设

$$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & \text{对于 } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\cap CD;\\ \cos\pi x, & \text{对于 } x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\cap CD;\\ x^2, & \text{对于 } x\in D.\end{cases}$$

这里D——康托集,而CD——它关于整个闭区间$[0,1]$的余集. 计算$(L)\int_0^1 f(x)dx$.

576. 在每一点$x\in[0,1]$等于数x的二进位表示式中第k位数字的函数用$\beta_k(x)$来表示. 证明,

$$\text{当 } j\neq k,\ (L)\int_0^1\beta_j(x)\beta_k(x)dx=\frac{1}{4};\ (L)\int_0^1[\beta_i(x)]^2dx=\frac{1}{2}.$$

577. 用$\varphi_k(x)$来表示用下述方法在线段$[0,1]$上所定义的函数: 若在点x的二进位表示式中第k个位置为数字1, 则$\varphi_k(x)=1$; 若在点x的二进位表示式中第k个位置为数字0, 则$\varphi_k(x)=-1$. 证明, 函数系$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k,\cdots\}$在线段$[0,1]$上为标准直交系, 即是说, 当$j\neq k$时,

$$(L)\int_0^1\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=0;\ (L)\int_0^1[\varphi_i(x)]^2dx=1.$$

578. 证明,若$\varphi(x)$在$[a,b]$上几乎处处有导数, 又若这个导数在$[a,b]$上有界,则它(导数)在$[a,b]$上为勒伯格可积.

579. 设$\{f_n(x)\}$——E上的非负有界可测函数序列. 设当

$n\to\infty$时，$(L)\int_E f_n(x)dx\to 0$. 由此可得出当$n\to\infty$时，$f_n(x)\to 0$在E上处处成立(或在E上即使几乎处处成立)吗？

580. 设在$[a,b]$上已给有界可测函数$f(x)$. 证明，若对任何的$c(a\leqslant c\leqslant b)$，$\int_a^c f(x)dx=0$，则$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处等于零.

581. 计算函数$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$在线段$[1,2]$上的勒贝格积分.

582. 函数$\frac{1}{x^2}$在线段$[0,1]$上可和吗？

583. 若

$$f(x)=\begin{cases}0, & 当x\in D,\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & 当x\overline{\in}D,\end{cases}$$

这里D——康托集，计算$(L)\int_0^1 f(x)dx$.

584. 若

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}, & 当x为无理点,\\ x^3, & 当x为有理点,\end{cases}$$

计算$(L)\int_0^1 f(x)dx$.

585. 若有界函数$f(x)$在集E上为勒伯格可积，则函数$[f(x)]^{10}$，$|f(x)|$，$\frac{1}{f(x)}$在此集上是否为勒伯格可积？

586. 证明，若在康托集D的点，$f(x)=0$；且在n秩邻接区间上，$f(x)=n$，则$(L)\int_0^1 f(x)dx=3$.

587. 证明：«在具有限测度的集E上的非负可测函数$f(x)$在E上可和的必要充分条件是：级数$\sum_k k\cdot mE_k$收敛（这里$E_k=E(k\leqslant f(x)<k+1)$）».

588. 证明:《在具有限测度的集E上的非负可测函数$f(x)$在E上可和的必要充分条件: 级数$\sum_k m\hat{E}_k$收敛, 这里$\hat{E}_k = E(f(x) \geqslant k)$》.

589. 证明,若函数$f(x)$在线段$[0, a]$上可和,则函数$f(kx)$在$\left[0, \frac{a}{k}\right]$上也可和(这里$k>0$).

590. 证明,无论对于任何的$k>0$, 函数$\frac{1}{x}\cos\frac{k}{x}$在$(0, 1)$上不可和.

591. 设在$[a, b]$上配置有n个可测集$E_1, E_2, \cdots, E_n$; 设线段$[a, b]$的每一点至少属于这些集中的q个集. 证明,集$E_1, E_2, \cdots, E_n$中至少有一个的测度大于或等于$(b-a)\frac{q}{n}$.

592. 设$\{f_n(x)\}$——在集E上为勒伯格可积的非负函数序列(E——具有限测度的可测集); 可否断言,若对于几乎一切的$x \in E$, $f_n(x) \to 0$(当$n \to \infty$),则当$n \to \infty$时,积分$\int_E f_n(x)dx$的序列也趋于零?

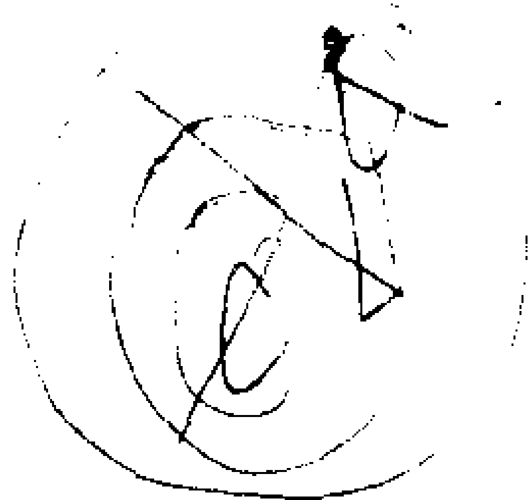
593. 设函数$f(x)$在线段$[a, b]$上除了点a外, 处处连续. 若积分

$$\int_t^b f(x)dx \qquad (1)$$

当$t \to a+0$时, 有有限极限存在, 则称此函数在$[a, b]$上为C-可积; 若函数$f(x)$在$[a, b]$上为C-可积, 则积分$\int_t^b f(x)dx$的极限称为函数$f(x)$的C-积分(或柯西反常积分)并记为$(C)\int_a^b f(x)dx$:

$$(C)\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)dx.$$

证明,若函数在$[a, b]$上为勒伯格可和, 则它在$[a, b]$上为C-可积,并且两个积分彼此相等.



594. 举例表明，在$[a,b]$上存在一个除点a外，处处连续的且在$[a,b]$上为C-可积函数，但它在该线段上非勒伯格可和.

595. 设$f(x)$——定义在具有限测度的集E上的可测函数.若当$t\to+\infty$时，积分①

$$\int_E [f(x)]_{-t}^{t}\,dx \qquad (2)$$

的极限存在，则称此函数为Q-可积. 若函数$f(x)$为Q-可积，则积分(2)的极限(当$t\to+\infty$)称为函数$f(x)$的Q-积分并记为

$$(Q)\int_E f(x)\,dx:$$

$$(Q)\int_E f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_E [f(x)]_{-t}^{t}\,dx.$$

证明，若函数$f(x)$在集E上为勒伯格可和，则它在此集上为Q-可积，且它的Q-积分等于勒伯格积分.

596. 举例表明Q-积分比勒伯格积分更广泛(即是说，在某个集E上非勒伯格可和，但在此集上为Q-可积的函数存在).

597. 证明，对于非负函数而言，Q-积分并不比勒伯格积分广泛(即是说，若非负函数在集E上为Q-可积，则它在此集上也为勒伯格可和).

598. 证明，定义在线段$[-a,a]$上的任何可测的奇函数$f(x)$在此线段上为Q-可积.

599. 下述论断：《若函数$f(x)$在可测集E上为Q-可积，则它在E的任何可测子集上也为Q-可积》正确否?

600. 下述论断：《若函数$f(x)$在E上为Q-可积，则函数$c\cdot f(x)$在E上也为Q-可积，并且

$$(Q)\int_E c\cdot f(x)\,dx=c\cdot(Q)\int_E f(x)\,dx》$$

---

① 记号$[f(x)]_a^b$的意义参阅习题545中的规定.

正确否？

601. 下述论断：《若函数 $f(x)$与 $g(x)$在E上为 Q-可积，则函数 $f(x)+g(x)$在E上也为 Q-可积》正确否？

602. 下述论断：《若三个函数 $f(x)$，$g(x)$，$f(x)+g(x)$在E上都为 Q-可积，则下之等式成立：

$$(Q)\int_E[f(x)+g(x)]dx=(Q)\int_E f(x)dx+(Q)\int_E g(x)dx》$$

正确否？

603. $f(x)$为给定在具有限测度的集E上的可测函数，若积分

$$\int_E[f(x)]_{-at}^{bt}dx \tag{3}$$

当 $t\to\infty$ 时，无论对于怎样的数 $a>0, b>0$ 都有有限极限存在，且若此极限与正数 a 与 b 的选择无关，则称 $f(x)$在E上为 A-可积. 若函数 $f(x)$在E上为 A-可积，则积分(3)的极限称为此函数的A-积分，并记为$(A)\int_E f(x)dx$:

$$(A)\int_E f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_E[f(x)]_{-at}^{bt}dx.$$

证明，若函数 $f(x)$在集E上为勒伯格可和，则它在此集上也为 A-可积.

604. 设在具有限测度的集E上已给可测函数 $f(x)$；证明，关系式

$$\lim_{t\to\infty}\int_E\{[f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at}\}dx=0$$

与

$$\lim_{t\to\infty}t\cdot mE(f(x)>t)=0$$

等价(这里 a 与 b——已知正数，$a\neq b$).

605. 证明，函数为 A-可积的下述判别准则：《在测度为有限的集E上的可测函数 $f(x)$ 在此集上为 A-可积的必要充分条件为

下述两个条件同时满足:

a) $(Q)\int_E f(x)dx$ 存在;

б) 当 $t\to\infty$ 时, $t\cdot mE(f(x)>t)\to 0$».

606. 举例表明, A-积分比勒伯格积分更广泛.

607. 证明, 对于非负函数而言, A-积分不比勒伯格积分广泛.

608. 任何在集 E 上为 A-可积的函数在此集上为 Q-可积吗? 任何在 E 上为 Q-可积的函数在此集上为 A-可积吗?

609. 下述论断: «若函数 $f(x)$ 在集 E 上为 A-可积, 则函数 $c\cdot f(x)$ 在 E 上也为 A-可积, 并且

$$(A)\int_E c\cdot f(x)dx=c\cdot(A)\int_E f(x)dx»$$

是否正确?

610. 下述论断: «若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上为 A-可积, 则函数 $f(x)+g(x)$ 在 E 上也为 A-可积, 并且有等式成立:

$$(A)\int_E[f(x)+g(x)]dx=(A)\int_E f(x)dx+(A)\int_E g(x)dx»$$

正确否?

611. 下述论断: «若函数在集 E 上为 A-可积, 则它在 E 的任何可测子集上为 A-可积»正确否?

612. 所谓 T-积分 $(T)\int_E f(x)dx$ 为勒伯格积分的具下列性质的某种推广:

a) 若函数 $f(x)$ 在测度为有限的可测集 E 上是勒伯格可和的, 则它在此集上也为 T-可积, 并且在集 E 上它的 T-积分与勒伯格积分彼此相等;

б) 若 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 E 上处处成立 (这里 $f(x)$ 与 $g(x)$——E 上的可测函数), 又若这两个函数都为 T-可积, 则

$$(T)\int_E f(x)dx \leqslant (T)\int_E g(x)dx.$$

证明，对于非负可测函数而言，这样的积分并不比勒伯格积分广泛(即是说，若非负可测函数在测度为有限的可测集E上为T-可积，则它在E上也为勒伯格可和，并且它的T-积分与勒伯格积分彼此相等)。

在习题 613—634 将要研究矢量函数的积分问题。

集$E\subset H_n$到欧氏空间H_m的映射$y=f(x)$称为矢量函数(或矢-函数)

在第九章我们研究过这样的映射，只是在那里对它们添加了补充限制——要求连续性。在本章我们将研究更广泛形式的映射。

术语《矢量函数》反映出这个函数的值位于欧氏空间内；而欧氏空间的元素可视作矢量，所以，它们可以彼此相加，也可以用数去乘。例如，若已知两点$y\in H_m$与$z\in H_m$，这里y由坐标$y_1, y_2, \cdots, y_m$给出，而z由坐标$z_1, z_2, \cdots, z_m$给出，则它们的和$y+z$是坐标为$y_1+z_1, y_2+z_2, \cdots, y_m+z_m$的点，而乘积$\alpha y$(这里$\alpha$——数)——坐标为$\alpha y_1, \alpha y_2, \cdots, \alpha y_m$的点。因此，若已知两个矢量函数$y=f(x)$与$z=g(x)$；它们是定义在$E\subset H_n$上且从空间$H_m$中取值，则可谈及这些函数的和(这将是函数$f(x)+g(x)$，使每一个$x\in E$对应于坐标为$f_1(x)+g_1(x)$，$f_2(x)+g_2(x)$，$\cdots$，$f_m(x)+g_m(x)$的点，这里$f_1(x)$，$f_2(x), \cdots, f_m(x)$——空间$H_m$中的点$f(x)$的坐标，而$g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$——点$g(x)$在$H_m$中的坐标)。完全相同，若已知矢量函数$y=f(x)$与数$\alpha$，则可谈及此函数乘以$\alpha$的乘积(这就是坐标为$\alpha f_1(x), \alpha f_2(x), \cdots, \alpha f_m(x)$的函数$\alpha f(x)$，这里$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$——$f(x)$的坐标)。

对于每一点$y\in H_m$可谈及关于此点的模$|y|$，此为连接H_m中的坐标原点与该点的矢量之长；若y由坐标$y_1, y_2, \cdots, y_m$来确定，则

$$|y|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2}.$$

对于模有不等式：$|y+z|\leqslant|y|+|z|$；$|y-z|\geqslant\big||y|-|z|\big|$。

若矢-函数$y=f(x)$的模在集E上有界(即是说，若存在这样的数$A>0$，使对一切的$x\in E$，有$|f(x)|\leqslant A$)，则此矢-函数称为在E上有界。在这种情况下，矢-函数的值所成之集，即集$f(E)$，为空间H_m中的有界集。

613. 若任意开集$G\subset H_m$的原像为空间H_n中的可测集，则

称矢-函数 $y=f(x)$（这里 $x\in E\subset H_n$, $y\in H_m$）为可测的.

证明，若函数$y=f(x)$可测，则任意闭集$F\subset H_m$的原像可测；任意 G_δ 型集的原像可测；任意 F_σ 型集的原像可测.

614. 证明，可测矢-函数与数的乘积也为可测矢-函数.

615. 证明，若两个可测矢-函数定义在同一个集 $E\subset H_n$ 上且在同一个空间 H_m 内取值，则它们的和也是可测矢-函数.

616. 设 $f(x)$——定义在E上的矢量函数. 证明，若 $f(x)$可测，则函数$|f(x)|$也可测. 举例表明，逆命题不真.

617. 设有界可测函数 $y=f(x)$ 定义在测度为有限的集E上，且在有界闭集 $F\subset H_m$ 上取值(即是说，$f(E)\subset F$). 用任意的方法，将集F分成有限个两两互不相交的 F_σ 型集:

$$F=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_k, \tag{1}$$

且在每一个 F_i 中选取一点 $y_i(y_i\in F_i)$. 用 e_1, e_2, …, e_k 表示集 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 的原像(显然，当 $i\neq j$ 时，$e_i\cap e_j=\varnothing$, $\bigcup_{i=1}^{k} e_i=E$ 又 $\sum_{i=1}^{k} me_i=mE$). 作对应于分法 (1) 与点 y_i 的取法之勒伯格积分和:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{k} y_i me_i. \tag{2}$$

若当集 F_i 的最大直径趋于零时，和数σ有有穷极限 I 存在，则此极限称为有界矢-函数 $f(x)$ 在集E上的勒伯格积分:

$$(L)\int_E f(x)dx=\lim_{\max \operatorname{diam} F_i\to 0}\sum_{i=1}^{k} y_i me_i \tag{3}$$

(若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在有 $\delta>0$, 使当 $\max\operatorname{diam} F_i<\delta$ 时，任意的勒伯格积分和满足不等式 $\left|\sum_{i=1}^{k} y_i me_i-I\right|<\varepsilon$, 则空间 H_m 中的

点 I 称为积分和(2)的极限).

证明,对于定义在测度为有限的集 E 上的任意有界可测矢-函数的勒伯格积分存在①.

618. 设 $f(x)$——定义在测度为有限的集 E 上的有界可测矢-函数. 证明,对于任意的数 c,等式:

$$(L)\int_E c\cdot f(x)dx = c\cdot(L)\int_E f(x)dx$$

成立.

619. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$——两个定义在测度为有限的同一个集 E 上且在同一个空间 H_m 内取值的有界可测函数. 证明

$$(L)\int_E[f(x)+g(x)]dx=(L)\int_E f(x)dx+(L)\int_E g(x)dx.$$

620. 设 $f(x)$——定义在测度为有限的集 E 上的有界可测矢-函数. 证明

$$\left|(L)\int_E f(x)dx\right|\leqslant(L)\int_E|f(x)|dx.$$

621. 设 $f(x)$——定义在测度为有限的集 E 上的有界可测矢-函数. 设 A——包含 $f(E)$ 的最小凸集②. 证明,存在这样的点 $y_0\in A$,它满足等式 $(L)\int_E f(x)dx=y_0\cdot mE$(《积分中值定理》).

为了将积分概念推广到无界矢量函数,我们必须引入零点的星形邻域的概念.

---

① 这里所引出的勒伯格积分的定义不仅对于在欧氏空间内取值的函数,而且对于更广泛的函数类也有意义. 设 $f(x)$—— 定义在具有测度的空间的某个集 E 上且在任何的巴拿赫空间 R 内取值的函数. 若集 E 的像 $f(E)$ 被包含有空间 R 的某个致密集 F 内,则称函数 $f(x)$ 在集 E 上是致密的.

若函数 $f(x)$ 在测度为有限的集 E 上可测且致密, 则函数 $f(x)$ 在集 E 上的勒伯格积分存在(显然,在已给情况下,勒伯格积分是空间 R 的元).

在这里我们不给出具有测度的空间、巴拿赫空间与致密集的定义. 对这些概念不熟悉的读者,对所给注释可忽视不管.

② 即是说, 包含 $f(E)$ 的所有凸集的交. 若对任意的 $y\in A$ 与 $z\in A$, 当一切可能的 $\alpha>0,\beta>0$ 且合条件 $\alpha+\beta=1$ 的点 $\alpha y+\beta z$ 也在集 A 中,则称集 A 是凸的.

若 H_m 内包含坐标原点的任何有界开集且具有下述性质：从坐标原点引出的每条射线与此集的边界仅相交于一点，这种开集称为 H_m 内零点的星形邻域.

球形邻域，即中心在坐标原点的 m 维开球是星形邻域的特殊情形.

设 B——空间 H_m 内的任何的集. 用 λB（这里 λ——固定的正数）表形状为 λx（对任何的 $x\in B$）的一切点所成之集.

显然，若 G——零点的星形邻域，则 λG（对于任意的正数 λ）也是零点的星形邻域.

现在我们利用零点的星形邻域 G 来引入矢量函数 $f(x)$ 的切断 $[f(x)]_G$ 的概念:

$$[f(x)]_G=\begin{cases}f(x), & \text{对于使 } f(x)\in G \text{ 的那些 } x\in E;\\ f_G(x), & \text{对于使 } f(x)\bar{\in} G \text{ 的那些 } x\in E.\end{cases}$$

这里 $f_G(x)$——邻域 G 的边界同连接坐标原点与点 $f(x)$ 的射线之交点（参阅图 7).

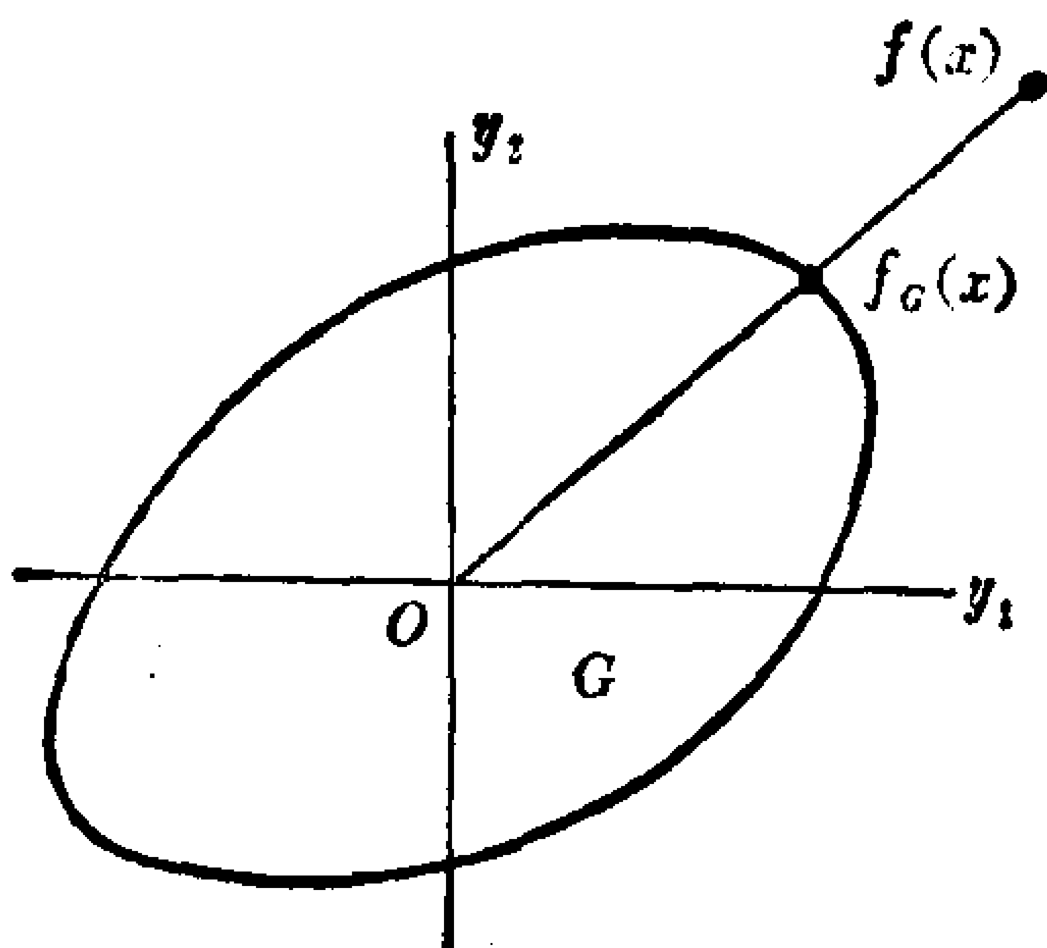


图 7

622. 设 $y=f(x)$——定义在测度为有限的集 E 上的无界可测矢-函数；若当 $R\to+\infty$ 时，积分

$$(L)\int_E [f(x)]_{S_R}dx \tag{4}$$

的极限存在，则称函数 $f(x)$ 在 E 上为 Q-可积，这里 S_R——零点的半径等于 R 的球形邻域；若矢-函数 $f(x)$ 在 E 上 Q-可积，则积分(4)的极限称为 $f(x)$ 的 Q-积分:

$$(Q)\int_E f(x)dx=\lim_{R\to+\infty}(L)\int_E [f(x)]_{S_R}dx.$$

证明, 若矢-函数 $f(x)$ 在 E 上 Q-可积, 则矢-函数 $c\cdot f(x)$ 在 E 上也为 Q-可积, 且下之等式成立:

$$(Q)\int_E c\cdot f(x)dx=c\cdot(Q)\int_E f(x)dx.$$

623. 举例表明, 存在这样两个在 E 上 Q-可积且在同一个空间 H_m 内取值的矢-函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 而它们的和在 E 上非 Q-可积.

624. 举例表明, 存在这样两个在同一个空间 H_m 内取值的矢量函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 它们的和在 E 上为 Q-可积, 但

$$(Q)\int_E f(x)dx+(Q)\int_E g(x)dx\neq(Q)\int_E [f(x)+g(x)]dx.$$

625. 举例表明, 在测度为有限的集 E 上 Q-可积的矢-函数在 E 的某个可测子集上可以是非 Q-可积的.

626. 若数性函数 $|f(x)|$ 的勒伯格积分存在, 则称矢-函数 $f(x)$ 在测度为有限的集 E 上绝对可积.

证明, 若 $f(x)$ 在 E 上绝对可积, 则它也为 Q-可积. 举例表明, 逆命题不真.

627. 证明, 若在同一个空间 H_m 内取值的两个矢-函数在测度为有限的集 E 上绝对可积, 则它们的和在此集上也绝对可积, 并且有

$$(Q)\int_E f(x)dx+(Q)\int_E g(x)dx=(Q)\int_E [f(x)+g(x)]dx.$$

628. 证明, 若矢-函数在测度为有限的集 E 上绝对可积, 则它在 E 的任何可测子集上也绝对可积.

629. 设 $y=f(x)$——定义在测度为有限的集 E 上的无界函数. 若对于零点的任何星形邻域 G, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 积分

$$(L)\int_E [f(x)]_{\lambda G}\, dx \tag{5}$$

的极限存在，且此极限与 G 的选法无关，则称此函数在 E 上为 A-可积. 在这种情况下，积分(5)的极限称为函数 $f(x)$ 在 E 上的 A-积分①：

$$(A)\int_E f(x)dx = \lim_{\lambda\to+\infty}(L)\int_E [f(x)]_{\lambda G}dx.$$

证明，任何在 E 上 A-可积的矢-函数在此集上为 Q-可积. 举例表明，存在在 E 上 Q-可积的矢-函数，但在此集上非 A-可积.

630. 证明，若矢-函数 $f(x)$ 在 E 上为 A-可积，则函数 $c\cdot f(x)$ 在 E 上也为 A-可积(这里 c——任意数)，并且下面的等式成立：

$$(A)\int_E c\cdot f(x)dx = c\cdot(A)\int_E f(x)dx.$$

631. 证明，矢-函数 $f(x)$ 在测度为有限的集 E 上为 A-可积的必要充分条件为下面两个条件同时满足：

a) 矢-函数 $f(x)$ 为 Q-可积于 E;

б) 使矢-函数的值在零点的半径是 R 的球形邻域之外的这些 $x\in E$ 所成之集 E_R 的测度当 $R\to+\infty$ 时是 $o\left(\frac{1}{R}\right)$:

$$\lim_{R\to+\infty} R\cdot mE_R = 0.$$

632. 举例表明，在测度为有限的集 E 上为 A-可积的矢量函数在 E 的某个可测子集上可以不是 A-可积.

633. 证明，若矢-函数在测度为有限的集 E 上绝对可积，则它

---

① Q-积分与 A-积分的定义，对于在任意的巴拿赫(Banach)空间(而不仅是在欧氏空间)内取值的函数也仍然有效. 但是，为了这个定义有意义，只需要考虑具有下述性质的函数：对于零点的任何球形邻域，利用此邻域所作函数的切断为集 E 上的致密函数(参阅习题 617 的注释).

对于矢-函数的 Q-积分与 A-积分的概念是属于作者提出的；它们在本书中被首次引入.

定理 631, 633, 634 是由雷巴柯夫(B. И. Рыбаков)证明的.

在此集上也为 A-可积.

634. 证明,若两个矢-函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在测度为有限的集 E 上为 A-可积且在同一个空间 H_m 内取值,则它们的和 $f(x)+g(x)$ 在集 E 上也为 A-可积,并且下面的等式成立:

$$(A)\int_E f(x)dx+(A)\int_E g(x)dx=(A)\int_E [f(x)+g(x)]dx.$$

答案与解法提示

第一部分 集 论

第一章 集的运算

5. 不能导出. 从 $A\setminus B=C$ 仅能导出 $A\subset B\cup C$.

6. 不能导出. 从 $A=B\cup C$ 仅能导出 $A\setminus B\subset C$(图 8).

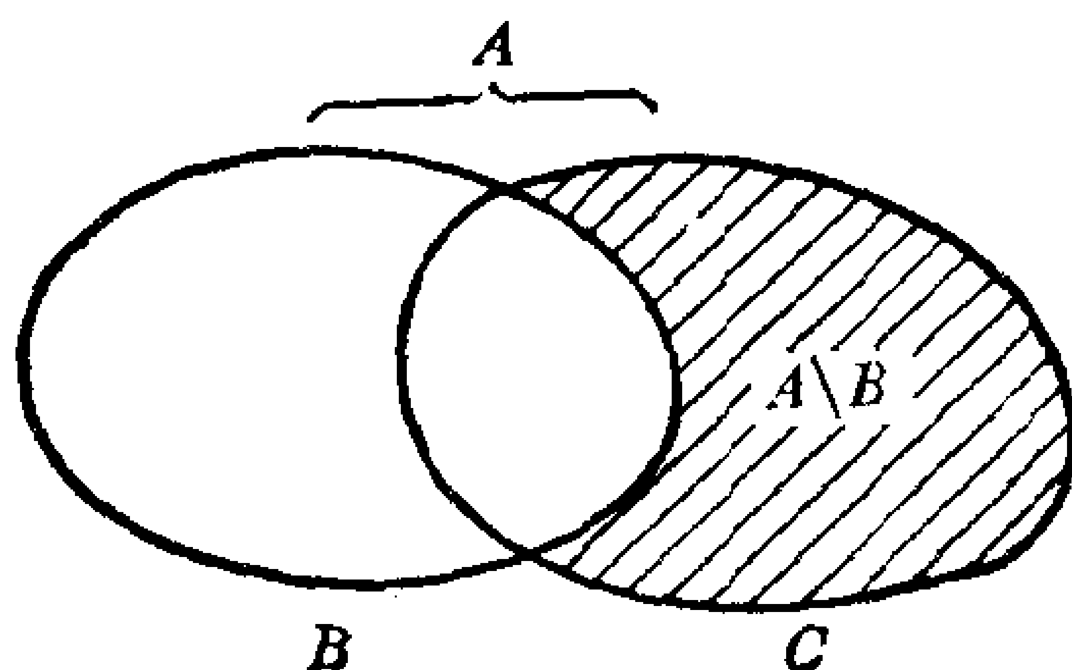


图 8

7. a) 正确.

   б) 不正确. 但有 $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$.

   в) 不正确. 但有 $(A\setminus B)\cup C\supset(A\cup C)\setminus B$.

8. 例, 参看图 9.

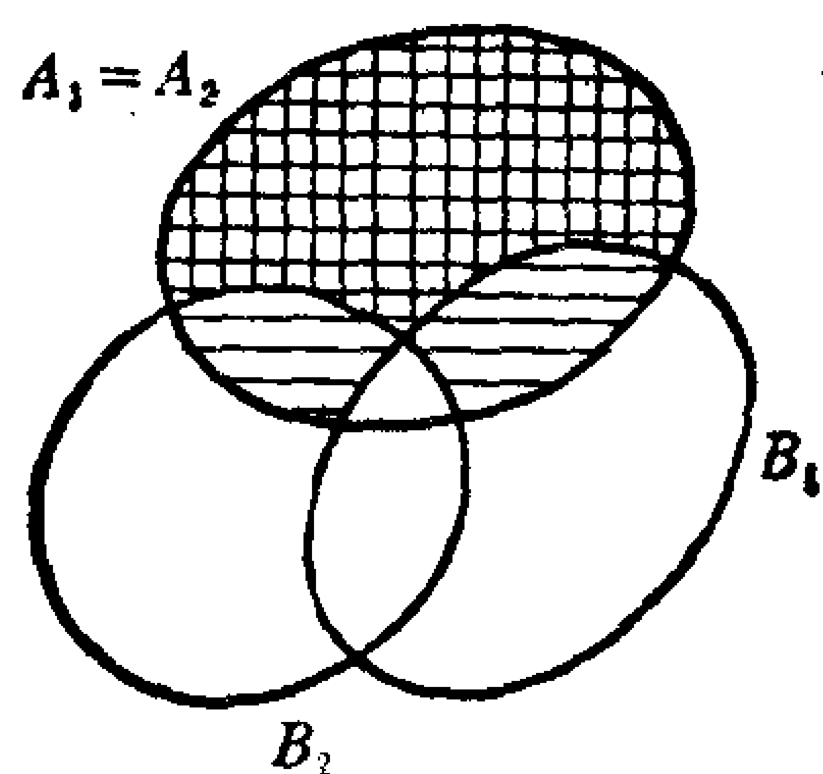


图 9 $(A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2)$是由线条织成正方形的区域.

$(A_1\setminus B_1)\cup(A_2\setminus B_2)$是由一切线条织成的区域. 这里,

$(A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2)\neq$
$(A_1\setminus B_1)\cup(A_2\setminus B_2)$.

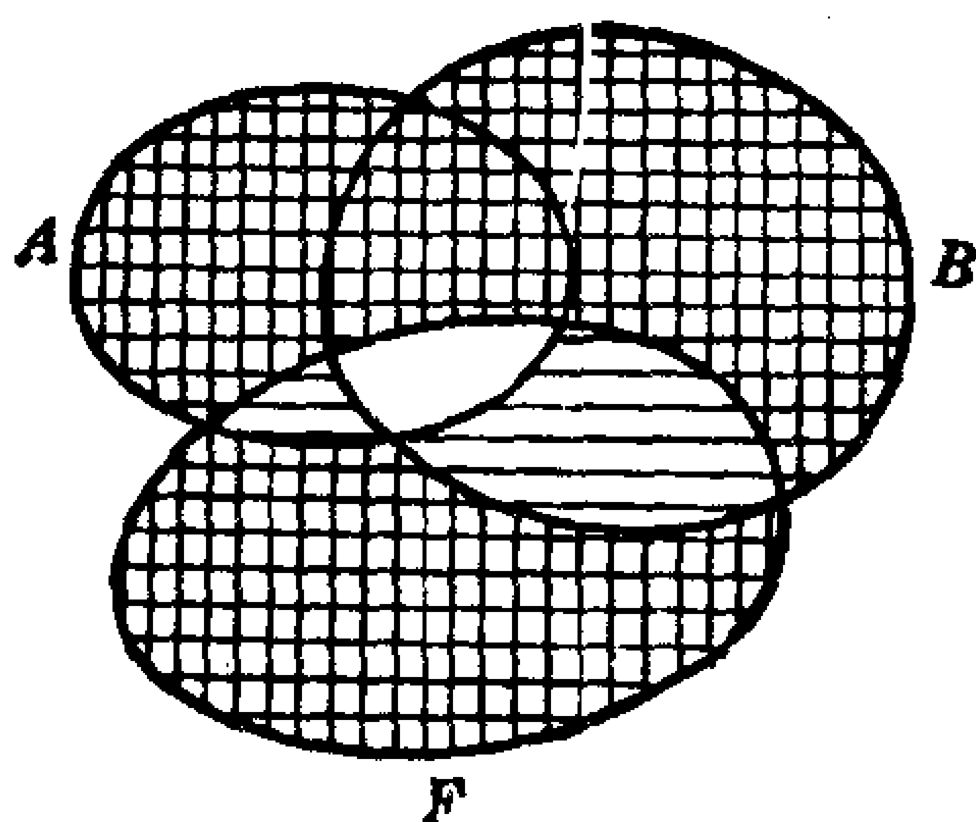


图 10 $(A\cup B)\triangle F$ 是由线条编织成正方形的集.

$(A\triangle F)\cup(B\triangle F)$ 是一切线条织成的集. 这里,

$(A\cup B)\triangle F\neq(A\triangle F)\cup(B\triangle F)$.

10. 从 $A\triangle X=A$ 知, $(A\cap CX)\cup(CA\cap X)=A$, 因而, $CA\cap X=\varnothing$, 即 X 不在 A 中的那部分是空集. 另一方面, $A\cap CX=A$, 由此得出 $CX\supset A$, 即 $X\cap A=\varnothing$, 即是说, X 在 A 中那部分也是空集. 所以, $X=\varnothing$.

12. 例, 参看图 10.

14. $C[C(X\cup Y)\cap(CX\cup CY)]=C[C(X\cup Y)]\cup(CX\cup CY)$

$$=(X\cup Y)\cup(CCX\cap CCY)=(X\cup Y)\cup(X\cap Y)=X\cup Y.$$

(因为, $X\cup Y\supset X\cap Y$).

19. 提示: 利用 18 题的结果.

22. 利用对偶原理.

23. 证等式 a).

设 $(x, y)\in E\times(F\cup G)$; 那末, $X\in E$, $y\in F\cup G$; 因而, $y\in F$ 或 $y\in G$; 这表示 $(x, y)\in E\times F$ 或

$$(x, y)\in E\times G;$$

而在这时,

$$(x, y)\in(E\times F)\cup(E\times G),$$

即

$$E\times(F\cup G)\subset(E\times F)\cup(E\times G). \tag{1}$$

同理可证,

$$(E\times F)\cup(E\times G)\subset E\times(F\cup G). \tag{2}$$

比较结果(1)和(2), 得等式 a).

类似可证明等式 б).

24. 证明方法类似于 23 题.

25. 对任意集 A, B, C, D 正确(证明方法同 23 题; 图 11 是这个等式的图解).

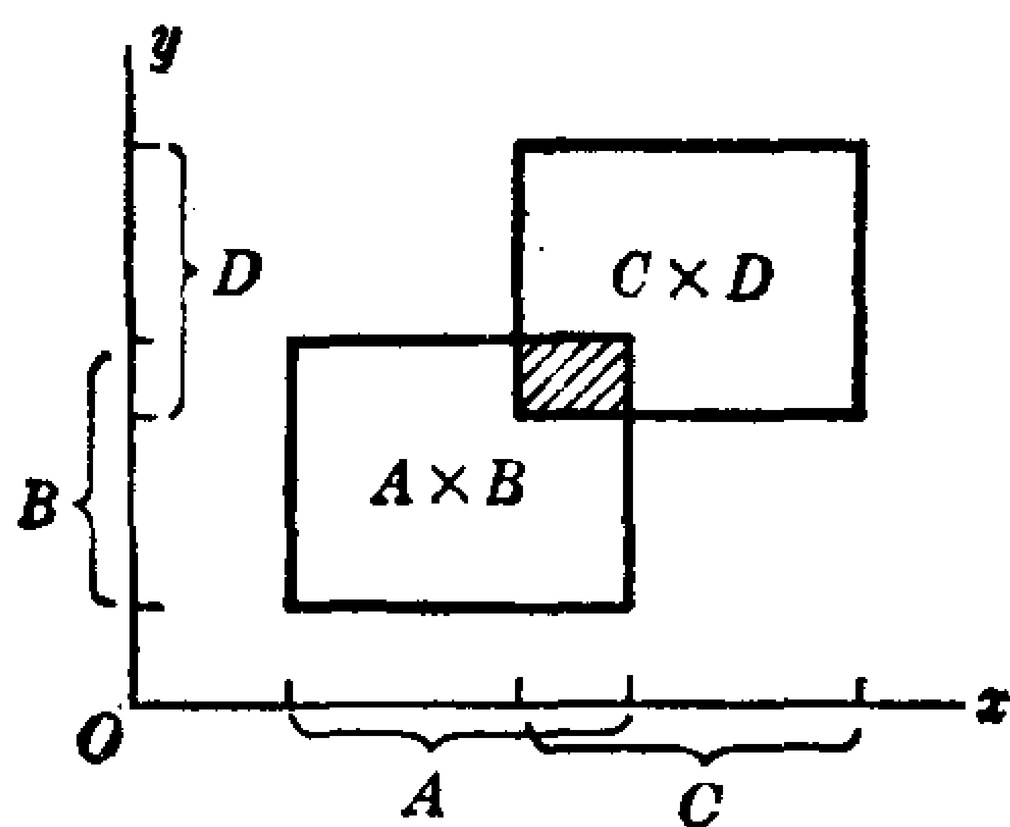


图 11

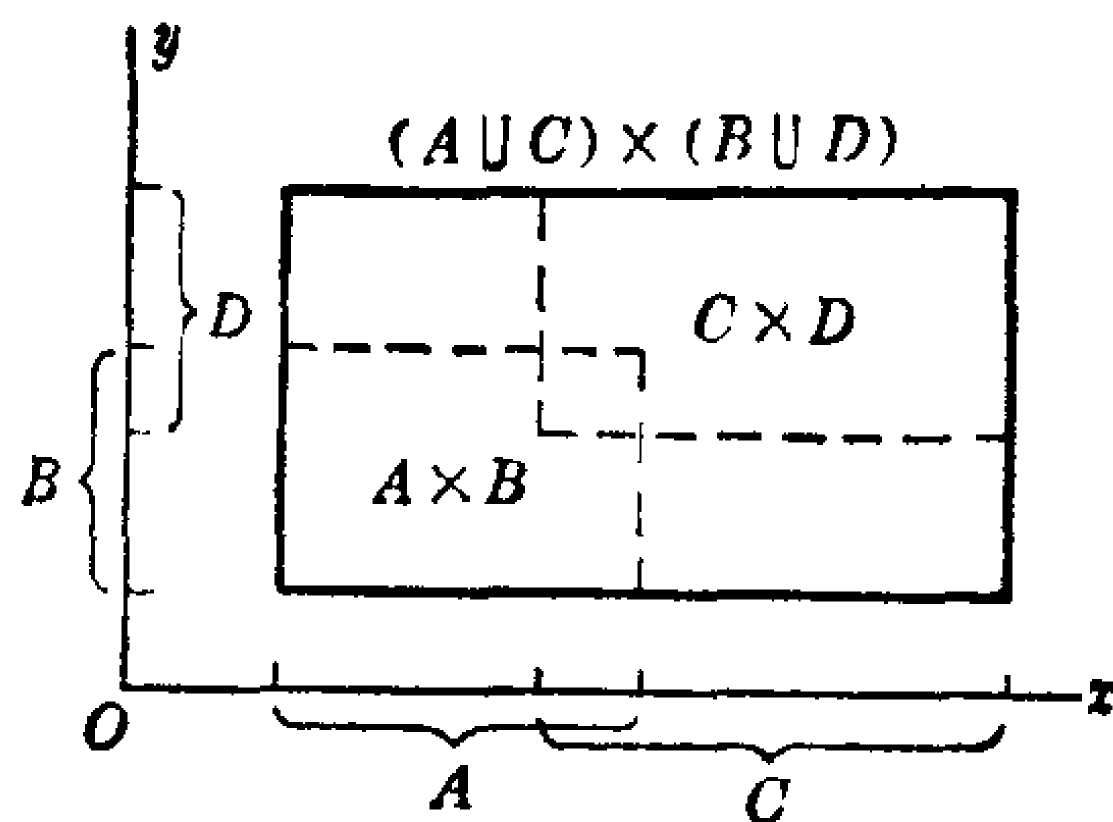


图 12

26. 等式并非对任意集 A, B, C, D 真(例, 参见图 12). 但结论

$$(A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cup C)\times(B\cup D)$$

恒成立. 证明方法同23题.

第二章 一一对应

27. 借助于函数 $y=2x$, 这里, $x\in N$, $y\in Q$, 可以建立集 Q 与 N 间的一一对应关系.

28. 将全部偶数(即集 P 之元)排列如下:

$$0;\ 2;\ -2;\ 4;\ -4;\ 6;\ -6;\ \cdots;\ 2k;\ -2k;\ \cdots$$

然后, 使每个偶数和它在序列中所占据的位置顺序数字对应.

29. 区间$[0,1]$中全部有理数集 R 和全部自然数集 N 之间的一一对应关系建立如下: 将每个数 $r\in R$ 表为既约分数, 分子与分母之和叫数 r 的高度; 显然, 在区间$[0,1]$中具已知高度的有理数是有限集. 现在按高度增加的顺序将区间$[0,1]$中的全部有理数排成序列: 第一位上置 R 中高度为1的数$0=\frac{0}{1}$, 然后置高度为2的数 $\frac{1}{1}$, 接着是高度为3的数 $\frac{1}{2}$ 等等; 如果具某一高度的有若干个不同的有理数, 则将它们按增加的顺序排列. 这样一来, R 中的一切元素被排成了下面的序列形式:

$$0;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{7};\ \frac{3}{5};\ \frac{1}{8};\ \cdots.$$

现在将 R 中的数 r 同它在序列中所占据的位置编号数 n 对应, 这个对应是 R 和 N 之间的一一对应.

30. 解法同上题.

31. 不存在. 表为二多项式相除之商的形式的任何函数 $f(x)$, 当 $x\to+\infty$ 时, 有有穷的或无穷的极限. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=q$(有穷数), 则存在这样的 N, 对一切 $k>N$, 有 $q-1<f(k)<q+1$. 由此知, 仅有有限个数 k(即 N 前面那些 k)可以同区间$(q-1,\ q+1)$之外的那些有理数对应. 因而, 不是全部有理数都是形为 $f(k)$ 的数.

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$, 则讨论是类似的(在这种情况下, 仅有有限个数 k 可以同属于固定区间$(-A,A)$中的有理数对应).

32. 线性变换 $x=(b-a)t+a$ 一一地映闭区间 $0\leqslant t\leqslant1$ 到闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上.

33. 开区间 $0<t<1$ 上的函数 $x=\mathrm{ctg}\,\pi t$ 一一地映这个开区间到整个直线 $-\infty<x<+\infty$ 上.

34. 函数 $x=a+\frac{b-a}{\pi}\mathrm{arctg}\,t$ 一一地映数轴 $-\infty<t<+\infty$ 到开区间 $a<x<b$ 上.

35. 解法类似.

36. 在开区间上取一点列,例如:

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=\frac{1}{4},\ \cdots,\ x_n=\frac{1}{n+1},\ \cdots$$

建立下面的对应: 闭区间中之点 0 对应于开区间中之点 x_1; $[0,\ 1]$ 中的点 1 对应于开区间的点 x_2; $[0,1]$ 中的点 $x_1=\frac{1}{2}$, 对应于 $(0,1)$ 中的点 x_3; $[0,1]$ 中的点 $x_2=\frac{1}{3}$ 对应于 $(0,1)$ 中的点 x_4; 一般地, $[0,\ 1]$ 中的点 x_n 对应于 $(0,1)$ 中的点 x_{n+2}; $\cdots$, 其余各点 $x\in[0,1]$ 对应于 $(0,\ 1)$ 中具相同坐标的点. 这样得到的对应是一一的(图 13).

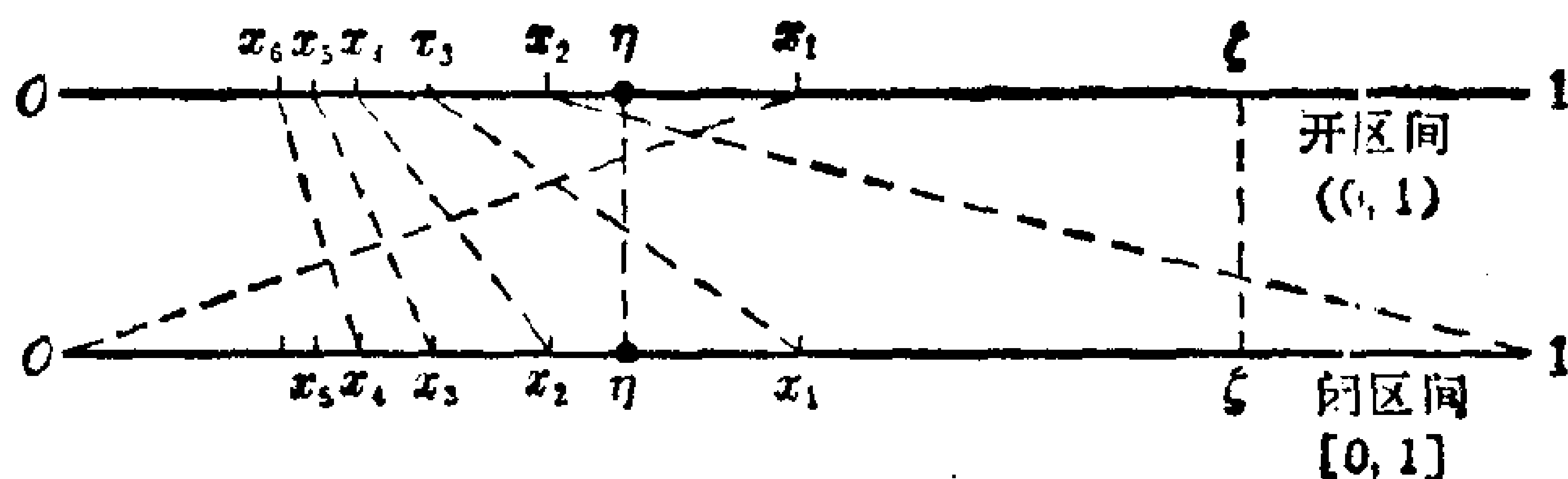


图 13

37. 先映 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 上(36 题), 然后, 映 $(0,1)$ 到 $(-\infty,+\infty)$ 上(33 题).

38. 利用解 36 题的方法.

39. 利用解 36 题的方法, 先映 $[a,b]$ 到 $[a,b)$ 上; 然后, 借助线性函数映 $[a,b)$ 到 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上; 最后, 借助函数 $y=\mathrm{tg}x$ 映 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 到 $[0,+\infty)$ 上.

41. 不存在. 因为定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数一定是有界的.

42. 不存在. 如果存在映 $[a,b]$ 到开区间 (c,d) 上的连续函数 $x=\varphi(t)$, 那末, 在闭区间 $[a,b]$ 上找不到这样的点 t_0, 使 $\varphi(t_0)=d$(因为 $\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\varphi(t)=d$). 这就同关于闭区间上的连续函数在这个闭区间上达到上确界的定理矛盾.

43. 不存在. 因为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数, 必取一切中间值(特别,

设 $\varphi(t_1)=1, \varphi(t_2)=3$, 这里 $t_1\in[a, b]$, $t_2\in[a, b]$；那末，一定能找到点 $t_0\in[a, b]$, 使 $\varphi(t_0)=2$).

44. 将圆周上的每一点同从一固定半径起到该点的向径之间圆弧长度数值对应后，圆周就映到了半闭区间$[0, 2\pi)$上了．然后用线性变换将半闭区间$[0, 2\pi)$映到半闭区间$[0, 1)$上；最后，用解 36 题的方法将后一半闭区间映到$[0, 1]$上．

45. 首先将开圆 $x^2+y^2<1$ 映到挖掉中心的圆 $0<x^2+y^2<1$ 上．为此，在开圆中取任一点列 $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_k, \cdots$，这里 M_0 是圆心．作如下对应：开圆中的每一点 M_k 同挖去中心的圆中的点 M_{k+1} 对应；二圆的其余各点(即不同于一切 M_k 的点)按相同的原则(即第一个圆的每一点 $N(x, y)$ 同第二个圆中有相同坐标的点 N' 对应)对应(图 14).

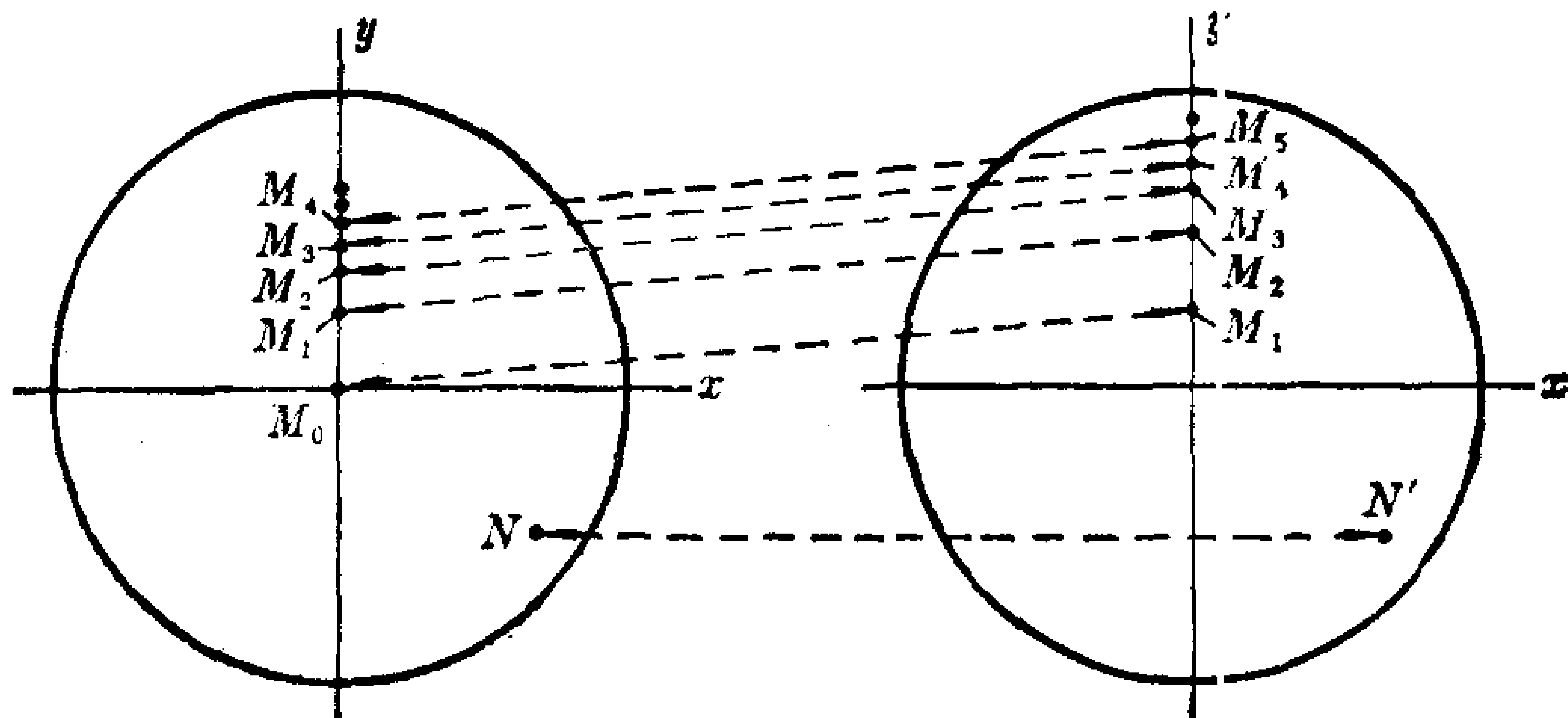


图 14

然后借助于反演法将挖掉中心的圆映到闭圆的余集上，即经圆内任意一点M和中心O引射线OM，在其延长线上取点M'，使$OM\cdot OM'=1$．那末，挖掉中心的圆中之点M同闭圆的余集中的点M'对应(图 15)，这个对应是一一的．

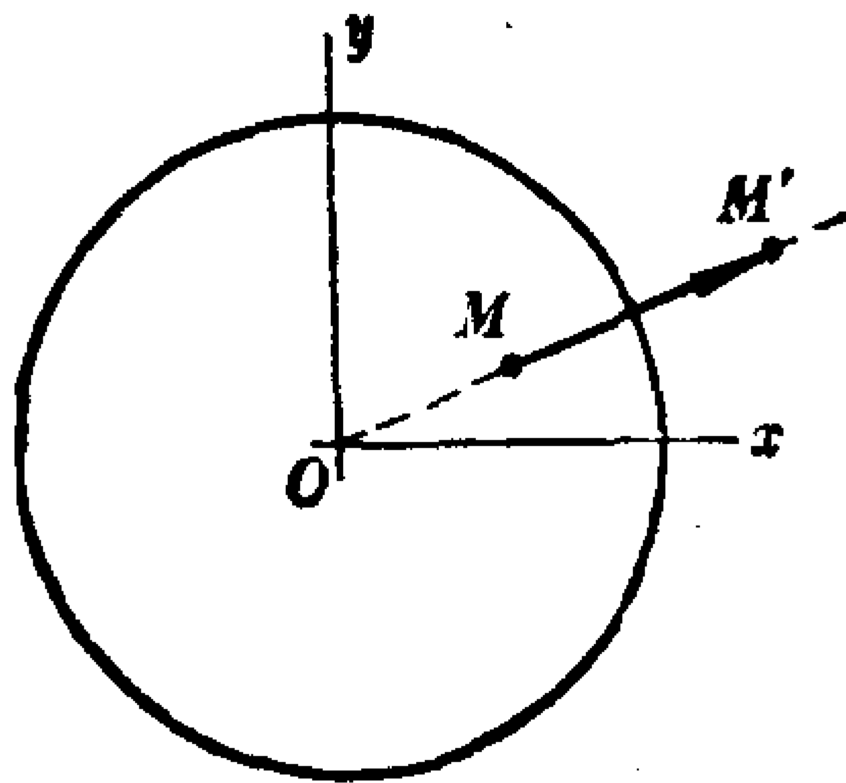


图 15

46. 在边界上任取一点 A，将半闭区间$(O, A]$(闭圆中的)映到开区间(O, A)(开圆中的)上，这里O是圆心．在每个半径上作这样的映射．然后将闭圆的中心同开圆的中心对应．

最后，所得到的映射是映闭圆到开圆上的一一映射．

47. 参看 45 题．

48. 先映闭圆到开圆上(参看 46 题)，然后，映开圆到闭圆的余集上(参看 45 题).

49. 提示. 参看 44 题的解法. 另一方法同解 50 和 51 题的方法类似.

50. 借助于所谓《测地投影》引进对应关系. 用 P_0 表在球面挖去的那一点，M_0 表球面上与 P_0 相对的点. 作一平面与球面切于点 M_0. 通过点 P_0 和球面上任意一点 M 引直线. 该直线同平面交于点 N，并将 N 与点 M 对应. 球面上的点 M 同平面上的点 N 之间的这个对应是一一的(图 16).

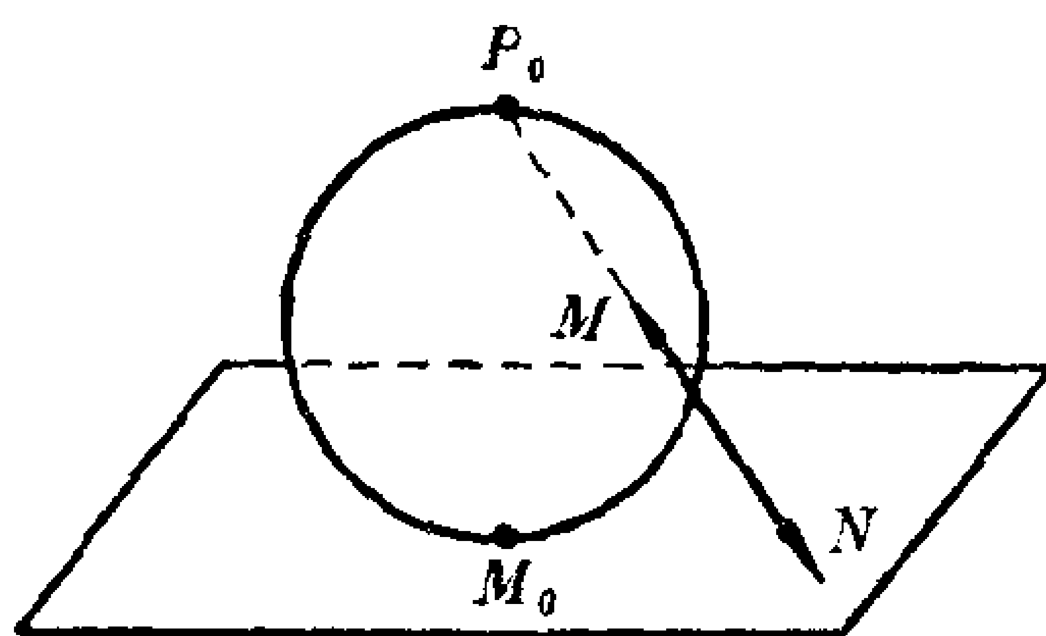


图 16

51. 首先将全球面映到挖掉一个点的球面上(这个对应可用像将圆映到挖掉中心的圆上的那种方法作出来，参看 45 题的解). 然后借助于《测地投影》，将挖掉一点的球面映到平面上.

52. 将圆的中心放在点 O 处，建立线段 OM(这里 M 是星形区域边界上任意一点)上的点同在射线 OM 上的半径 OA 上的点之间的一一对应；而点 O 同自身对应.

53. 在无理数集 A 中取出任意一序列，例如：$\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \cdots, n\sqrt{2}, \cdots$，用 B 表一切实数集；R 表全部有理点集(将有理点编号：$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$)；$L$ 表一切形如 $n\sqrt{2}$ 的数集；C 表一切不被表为形如 $n\sqrt{2}$ ($n>0$，整数)的全体无理数集，那末，

$$A=C\cup L,\quad B=C\cup(L\cup R).$$

将集 L 中的元同集 $L\cup R$ 中的元一一对应起来，例如，用下面的方法：

$$L:\ \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \cdots, (2k-1)\sqrt{2}, 2k\sqrt{2}, \cdots$$

$$L\cup R:\ r_1,\quad \sqrt{2},\quad r_2,\quad 2\sqrt{2}, \cdots,\qquad r_k,\quad k\sqrt{2}, \cdots$$

将集 C 中的点同自身一一对应起来. 最后得到 A 和 B 之间的一一对应.

54. a) 用下面的方法：

$$x=-\frac{\pi}{2}+\pi\frac{\zeta-a}{b-a}, y=-\frac{\pi}{2}+\pi\frac{\eta-c}{d-c}$$

将矩形 $(a, b)\times(c, d)$ 中之点 (ζ, η) 与正方形 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 中之点 (x, y) 对应.

б) 用下面的方法：

$$X = \mathrm{tg}\, x,\ \ Y = \mathrm{tg}\, y$$

将正方形$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$中的点$(x,\ y)$与平面上的点$(X, Y)$对应.

в) 参看 a), б).

55. 在这个对应下得到的不是线段$(0,\ 1]$中的全体点. 在已给对应下, 不能得出无尽十进位小数展式中, 从某个号码起全部偶数位上为 0 的点; 例如, 不能得到点 0.35703070…, 因而, 这个对应不是正方形$(0, 1]\times(0, 1]$和线段$(0, 1]$之间的一一对应. 但是, 这个对应是正方形中的点和线段$(0, 1]$的某个子集中的点之间的一一对应.

56. 将线段$[0, 1]$中的全部有理数编号:

$$r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots \tag{1}$$

并将正方形中全部有理点排列成下表:

$$\begin{array}{llll}
(r_1, r_1) & (r_1, r_2) & (r_1, r_3) & \cdots \\
(r_2, r_1) & (r_2, r_2) & (r_2, r_3) & \cdots \\
(r_3, r_1) & (r_3, r_2) & (r_3, r_3) & \cdots \\
(r_4, r_1) & (r_4, r_2) & (r_4, r_3) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

按下面的次序将这个表格中的全部点表成一序列: 首先是(r_1, r_1)的点, 然后是横标足指数与纵标足指数之和等于 3 的点, 接着是足标数之和等于 4 的点, 等等:

$$(r_1, r_1),\ (r_1, r_2),\ (r_2, r_1),\ (r_1, r_3),\ (r_2, r_2),\ (r_3, r_1),\ (r\ , r_4),\ (r_2, r_3),\ \cdots \tag{2}$$

现在, 用通常的方法, 将序列(1)中的第 n 项同序列(2)中的第 n 项对应, 则得序列(1)中的项与序列(2)中的项之间的一一对应.

57. 提示. 首先建立一切正方形$(m, m+1]\times(n, n+1]$组成的集与一切半闭区间$(p, p+1]$组成的集之间的一一对应(这里 $m, n,\ p$ 是一切可能的整数). 然后建立正方形$(m, m+1]\times(n,\ n+1]$中的有理点集同与之对应的半闭区间中有理点集间的一一对应.

58. 提示. 将一切有理系数多项式表为整系数多项式被自然数除的商的形式.

59. 首先建立自然数的一切有限子集所组成之集族与半闭区间$[0, 1)$中全部二进位有理点集之间的一一对应: 将每个有限子集$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$(这里

$n_1<n_2<\cdots<n_k$)与二进位小数对应，该二进位小数在小数点后第 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 位上为 1，其余各位为 0; 例如，集(2, 3, 5)对应二进位小数 0.01101，即二进位有理点$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}=\frac{13}{32}$.

这样的对应确定后，余下的仅是将半闭区间[0, 1)中的全体二进位有理点加以编号的问题．而编号可以用下面的方法作出:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{3}{2^4}, \frac{5}{2^4}, \frac{7}{2^4}, \frac{9}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \cdots$$

由此，半闭区间[0, 1)中二进位有理小数的集同全体自然数的集之间就建立了一一对应关系.

60. 将每个自然数序列

$$n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$$

同自然数升序列

$$m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots$$

对应，这里，

$m_1=n_1$, $m_2=n_1+n_2$, $m_3=n_1+n_2+n_3$, $\cdots$, $m_k=n_1+n_2+\cdots+n_k$, $\cdots$,

这个对应是一一的.

61. 将序列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 同二进位无穷小数对应，该二进位小数在小数点后第 $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k, \cdots$ 位上为 1，其余各位上为 0(比较 59 题的解法).

第三章　集的势

62. 可数集.

63. 可数集.

65. 可数集(参看关于 $p=2$ 时 59 题的解).

66. 可数集.

67. 首先注意，单调增函数 $f(x)$的每一间断点 x_0 是第一类间断点．事实上，因为，函数 $f(x)$在$[a, x_0]$上是单调有界的，那末，当 $x\to x_0-0$ 时，它有极限；类似地，当 $x\to x_0+0$ 时，函数 $f(x)$ 也有极限.

称差 $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ 为函数在间断点 x_0 处的跃度．单调增函数在每个间断点处的跃度是正的．容易验证，跃度大于 a(这里 a 是任意一正数)

的间断点集是有限的，即是说，这些点的数目不超过$\frac{f(b)-f(a)}{a}$. 用 E_k 表跃度大于$\frac{1}{k}$的间断点之集. 显然，全部间断点之集E等于所有E_k的和：

$$E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup\cdots\cup E_k\cup\cdots$$

因为，所有的 E_k 都有限，那末，E 至多可数。

对在$[a, b]$上单调减函数证明类似.

68. 用 A_i 表在闭区间$[-i, i]$上的函数的间断点之集.

在整个数轴上全部间断点之集 A 等于一切 A_i 的和：

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots;$$

每个 A_i 至多可数(参看 67 题). 可数多个这样的集之和也是至多可数的. 因而，A 至多可数.

69. 命 $E_n=E\cap\left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$. 显然，$\bigcup\limits_n E_n=E$, 因为，

$$\bigcup_n E_n=\bigcup_n\left\{E\cap\left(\frac{1}{n}, +\infty\right)\right\}=E\cap\left\{\bigcup_n\left(\frac{1}{n}, +\infty\right)\right\}$$
$$=E\cap(0, +\infty)=E.$$

如果一切 E_n 都不超过可数，那末，所有 E_n 之和也不超过可数，这就与E为不可数的条件矛盾. 因而，诸 E_n 中至少有一个是不可数的.

70. 不正确. 例如，$E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, 该集$E$是无限集；但对任意 $\tau>0$, 集 $E\cap(\tau, +\infty)$是有限的.

71. 能. 可取任何一个不同于一切$|x_i-x_k|$(这里，$\{x_i\}$是已知集 E)的正数作为 a. 不同的这种数$|x_i-x_k|$是可数集. 所以，总能找到不同于一切$|x_i-x_k|$的数 $a>0$.

72. 可. 如同上题一样进行证明.

73. 用点 $0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$将直线分成可数个闭区间，每个闭区间至多含已知集一个点；因而，在集E中的点和由已作出的闭区间组成的某一集族之间存在一一对应关系. 即是，集E至多可数.

74. 证明如同 73 题. 同时，用直线簇：$x=\text{const}$ 和 $y=\text{const}$ 将平面分为可数个边长为$\frac{a}{\sqrt{2}}$的正方形.

75. 连续势.

76. 连续势(参看 61 题).

77. 连续势(参看上一题及 60 题).

78. 79. 连续势.

80. 连续势. 提示. 建立全部有理数之集同全部自然数之集之间的一一对应. 于是,就建立起了有理数组成的一切序列之集和自然数组成的一切序列之集之间的一一对应. 这样问题就归结到了 77 题.

81. 连续势.

82. 连续势(每个闭区间$[a, b]$对应半平面 $y>x$ 上具有坐标为 a, b 的那一点;这个对应是一一的,半平面 $y>x$ 上的点集的势是连续势).

83. 这个集的势是有限的或可数的.

84. 连续势. 提示. 每个圆$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$同三维空间中坐标为 a, b, R 的点对应,然后,求出空间点集的势.

85. 这些圆周所成之集可能是不可数的(例如, 所有的同心圆周组成的集).

86. 两两不相交的字母T组成的任何一个集至多是可数的. 我们证明这一论断: 将已知集的每个字母T同平面上的这样的三个有理点 M, N, P对应, 使线段 MN 同字母T的一竖相交, 而 MP 和 NP 与字母T的一横相交于字母一竖的两侧(图 17). 同样的三个有理点 M, N, P 至多对应一个字母T(容易证明,如果三有理点对应两个不同的字母 T,那末,这两个字母就要相交). 因而,字母T组成的已知集同平面上由三个有理点组成的某一集之间确立了一个一一对应. 这样的三点所成之集至多可数, 那末,两两不相交的字母T所成之集也至多可数.

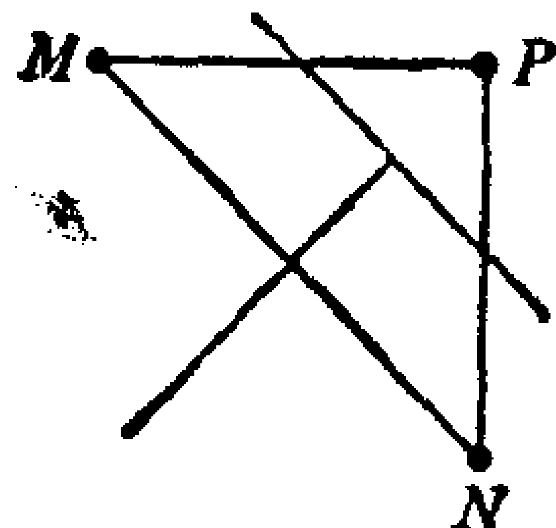


图 17

87. 这样的集的势可能小于或等于连续势. 为此,在直线 $y=-x$ 上,作任意一集 E, 通过这个集E 的每一点写一个字母Γ(用此点作为字母Γ的角顶点, 而字母Γ的横竖二画分别平行于二坐标轴). 所有这样写出的字母是两两不相交的,这些字母之集具有集 E 的势.

88. 连续势(用A表形如 kx, $k>0$ 的函数所成之集,用B表严格增的连续函数的全体,用C表所有连续函数全体. 那末, $A\subset B\subset C$. 但A和C有连续势,因而B也有连续势).

89. 连续势(提示. 注意单调函数的间断点集至多是可数的, 且这种函数的全部间断点都是第一类间断点. 同时还注意, 在$[a, b]$上各种不同的可

数字集组成的集具有连续势).

90. 连续势.

91. 连续势. 为此,我们建立十进位小数的展式中缺 7 的所有无尽十进位小数之集 A 和$[0, 1]$上的一切无尽九进位小数之集 B 之间的一一对应: 集 A 中每个十进位小数对应 B 中这样的小数,该小数是前一个小数中凡是数字 9 都用数字 7 代替后而得到的. 这个对应是一一的. 但 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{[0, 1]}}=c$,因而, $\overline{\overline{A}}=c$.

92. 连续势.

93. 连续势. 所指形式的十进位小数之集 A 和全体十进位小数之集 B 之间的一一对应可用下面的方法确立: 将 A 中的每个无尽小数同 B 中这样的无尽小数对应,该无尽小数是由前一小数中删去第三位上的数字 7 而得到的. 例如,与小数 $x=0.257361\cdots\in A$, 对应的是小数 $y=0.25361\cdots\in B$; 与小数 $x=0.237758\cdots\in A$ 对应的是小数 $y=0.23758\cdots\in B$. 集 B 有连续势, 因而, A 有连续势.

94. 连续势(参看 91 题).

95. 用字母 A 表半径为 r 的闭圆,字母 B 表具同中心同半径的开圆, 字母 C 表同中心半径为$\frac{r}{2}$ 的闭圆. 那末, $A\supset B\supset C$. 集 A 和集 C 有相同的势(它们之间的一一对应可借助于相似变换来实现, 而相似变换中心为公共的圆心). 从集 A 和集 C 的对等性得知 A 对等于 B (根据康托-白恩斯坦定理).

96. 参看 95 题.

97. 设 A 是全平面, B 是闭正方形, C 是包含在 B 内的开正方形, 那末, $A\supset B\supset C$. 但 A 对等于 C(参看 54 题 B),因而, A 对等于 B.

99. 存在. 任意集 $A\backslash C$(这里 C 是集 A 的任意一个有限子集)对等于 B.

100. $A=(A\backslash B)\cup(A\cap B)$, $B=(B\backslash A)\cup(A\cap B)$, 同时, $A\backslash B$ 和 $A\cap B$无公共点. 同样,集 $B\backslash A$ 和 $A\cap B$ 也无公共点. 因为,根据条件, $A\backslash B\sim B\backslash A$且 $A\cap B\sim A\cap B$, 所以, $A\sim B$.

101. 根据问题的条件,容易验证关系式成立:

$$B=A\cup(B\backslash A), \tag{1}$$

$$B\cup C=[A\cup(C\backslash B)]\cup(B\backslash A) \tag{2}$$

等式(1)右边部分两项无公共点. 同样, 等式(2)右边部分两项也无公共点.

集 A 和集 $A\cup(C\backslash B)$ 对等; 由 $A\subset A\cup(C\backslash B)\subset A\cup C$ 和按条件 $A\sim A\cup C$,

于是得出 $A\sim A\cup(C\setminus B)$. 由此关系及等式(1)和(2)得出 $B\sim B\cup C$.

102. 不正确. 例如:

$$A=\{1,2,3,4,\cdots\},\quad B=\{2,3,4,\cdots\},$$
$$C=A,\quad D=\{3,4,5,\cdots\}.$$

这里 $A\sim C$, $B\sim D$, $A\supset B$, $C\supset D$, 但 $A\setminus B$ 不对等于 $C\setminus D$($A\setminus B$ 由一个元组成, $C\setminus D$ 由两个元组成).

103. **104.** 不正确.

106. 连续势.

107. 证明: 用 C_n 表半径为 n, 圆心在坐标原点的圆. 显然,

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(C_n\cap E).$$

如果全部 $C_n\cap E$ 都不超过可数, 那末, 集 E 也不超过可数, 但按条件 E 不可数; 因而, 至少有一集 $C_n\cap E$ 不可数.

108. 参看 59 题.

109. 连续势.

110. 超连续势.

第四章 度量空间

111. 满足前两个公理是显然的. 用下面的方法来验证满足三角形公理: 对于在 $[a,b]$ 上任意的有界函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ 和任意的 $t\in[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\psi(t)|&\leqslant|\varphi(t)-\chi(t)|+|\chi(t)-\psi(t)|\\&\leqslant\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)-\chi(t)|+\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\chi(t)-\psi(t)|\\&=\rho(\varphi,\chi)+\rho(\chi,\psi).\end{aligned}$$

因而, 数 $\rho(\varphi,\chi)+\rho(\chi,\psi)$ 是函数 $|\varphi(t)-\psi(t)|$ 的上界. 上确界是上界中的最小者, 故

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\rho(\varphi,\chi)+\rho(\chi,\psi).$$

即

$$\rho(\varphi,\psi)\leqslant\rho(\varphi,\chi)+\rho(\chi,\psi).$$

112. 首先证明: 只要数列诸项的模所组成的级数收敛, 则对于任意的

数列 $x(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ 和 $y(b_1, b_2, b_3, \cdots)$，距离 $\rho(x, y)$ 都是有定义的．事实上，因为 $|a_i-b_i|\leqslant|a_i|+|b_i|$，而级数 $\sum\limits_i|a_i|$ 和 $\sum\limits_i|b_i|$ 由条件知道是收敛的．因此级数 $\sum\limits_i|a_i-b_i|$ 收敛．

为了验证它满足三角形公理（满足前两个公理是显然的），我们注意，对任意的 i，有

$$|a_i-b_i|\leqslant|a_i-c_i|+|c_i-b_i|,$$

因此

$$\sum_i|a_i-b_i|\leqslant\sum_i|a_i-c_i|+\sum_i|c_i-b_i|,$$

即

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y),$$

这里 $z=z(c_1, c_2, c_3, \cdots)$．

113．如像 111 题那样验证满足全部公理．

114．当级数 $\sum\limits_i a_i^2$ 和 $\sum\limits_i b_i^2$ 收敛时，级数 $\sum\limits_i(a_i-b_i)^2$ 恒收敛，它可由下式推出：

$$(a_i-b_i)^2\leqslant a_i^2+2|a_ib_i|+b_i^2\leqslant a_i^2+2\cdot\frac{a_i^2+b_i^2}{2}+b_i^2=2a_i^2+2b_i^2.$$

满足度量空间的前两条公理是显见的．按下面的办法来验证它满足第三条公理．在 n 维欧氏空间中不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-c_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(c_i-b_i)^2}$$

成立（即 n 维欧氏空间中的三角形公理）．在此不等式中，令 $n\to\infty$，取极限，得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-c_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(c_i-b_i)^2}.$$

115．在不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\varphi(x)-\chi(x)|+|\chi(x)-\psi(x)|$$

两边，由 a 到 b 积分，便可验证三角形公理．

116．否．因为由等式 $\sin^2(x-y)=0$ 不能得出 $x=y$．因而不满足恒等

公理.

117. 是度量空间. 前两条公理容易验证. 为了验证第三条公理, 先证明对任意的 $\alpha\geqslant 0$ 和 $\beta\geqslant 0$, 不等式

$$\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta\geqslant\operatorname{arctg}(\alpha+\beta)$$

成立. 为此, 只需证明在固定 $\beta>0$ 时, α 的函数 $f(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta-\operatorname{arctg}(\alpha+\beta)$ 是递增的. 因 $f(0)=0$, 则在 $\alpha>0$ 时, $f(\alpha)>0$.

118. 是. 对任意的 $\alpha\geqslant 0, \beta\geqslant 0$, 不等式 $\alpha+\beta\leqslant\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ 显然成立. 两端开方, 得 $\sqrt{\alpha+\beta}\leqslant\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, 由此不等式可推出满足三角形公理.

119. 是度量空间.

120. 是度量空间.

121. 集 E 非度量空间. 虽然满足头两条公理, 但三角形公理不满足. 因为当点 M, N 在 M_0 的两侧, 且非常接近 M_0 时, 有

$$\rho(M,N)>\rho(M,M_0)+\rho(M_0,N).$$

122. 为了推出积分的柯西-布尼雅考夫斯基不等式, 我们把闭区间 $[a, b]$ 分成 n 段 $\Delta t_k(k=1,2,\cdots,n)$, 并在每段内任取一点 t_k, 然后, 运用有限和的柯西-布尼雅考夫斯基不等式于两个有限序列:

$$\varphi(t_1)\sqrt{\Delta t_1}, \varphi(t_2)\sqrt{\Delta t_2}, \cdots, \varphi(t_n)\sqrt{\Delta t_n};$$

$$\psi(t_1)\sqrt{\Delta t_1}, \psi(t_2)\sqrt{\Delta t_2}, \cdots, \psi(t_n)\sqrt{\Delta t_n},$$

便得出

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(t_k)\psi(t_k)\Delta t_k\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}[\varphi(t_k)]^2\Delta t_k}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}[\psi(t_k)]^2\Delta t_k},$$

令 $\Delta t_k\to 0$, 在不等式两端取极限便得到

$$\int_a^b\varphi(t)\psi(t)dt\leqslant\sqrt{\int_a^b[\varphi(t)]^2dt}\sqrt{\int_a^b[\psi(t)]^2dt}.$$

这就是柯西-布尼雅考夫斯基积分不等式, 对于任意的连续函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 它都是对的. 用 2 去乘它的两端, 然后两端加上 $\int_a^b[\varphi(t)]^2dt+\int_a^b[\psi(t)]^2dt$, 可得

$$\sqrt{\int_a^b (\varphi+\psi)^2 dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b \varphi^2 dt} + \sqrt{\int_a^b \psi^2 dt}.$$

现在假定 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 是在 $[a,b]$ 上任意的三个连续函数．用 $\varphi(t)=x(t)-z(t)$, $\psi(t)=z(t)-y(t)$代入上述不等式，便得

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y);$$

因而，在已给的空间中三角形公理成立．容易验证恒等公理和对称公理也都满足，从而，给出的空间是度量空间．

123. 是度量空间．

提示．为了验证三角形公理，预先把距离公式化为下面的形式较简单：

$$\rho(l_1,l_2)=\sqrt{(p_2-p_1)^2+(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)^2+(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)^2}.$$

然后利用三维欧氏空间中三角形不等式成立这一事实．

124. 是度量空间．

125. 不是度量空间．因为恒等公理不满足：两条直线

$$l_1:\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0;$$

$$l_2:\ x\cos(\pi-\alpha)+y\sin(\pi-\alpha)-p=0$$

并不重合，但有 $\rho(l_1,l_2)=0$．另方面，两条直线

$$L_1:\ x\cos\alpha+y\sin\alpha=0;$$

$$L_2:\ x\cos(\pi+\alpha)+y\sin(\pi+\alpha)=0$$

是重合的，却又有 $\rho(L_1,L_2)=2|\sin\alpha|\neq0$，(当 $0<\alpha<\pi$)．

126. 是度量空间．

127. 是度量空间．

128. 不能．R 可能非度量空间(例如，参看 125 和 126 题)．

129. 除恒等公理外，在 $\mathscr{E}$ 中其余的公理都满足．例如，设 R——数轴，$E_1=(a,b)$, $E_2=[a,b]$，则有 $\rho(E_1,E_2)=0$，其实 $E_1\neq E_2$．

130. 集族Φ是度量空间．

131. 这个集族不是度量空间．如果 $E_1\subset E_2$，则 $\rho(E_1,E_2)=0$，其实 $E_1\neq E_2$．

第五章　集的极限点与内点·开集与闭集

132. 设 $\inf\limits_{\substack{x\in E\\ y\in E}, x\neq y}\rho(x,y)=d>0$．我们证明，平面上的任何点 a 都不可能是

极限点．为此，我们证明，在点 a 的$\frac{d}{2}$-邻域中不会有一个以上的属于E的点．事实上，如果有E中的两点：$x\in E$, $y\in E$, 那末，

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, a)+\rho(a, y)<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=d,$$

即

$$\rho(x, y)<d$$

而这与条件 $d=\inf\limits_{\substack{x\in E\\ y\in E}\, x\neq y}\rho(x, y)$ 矛盾．

133. 直线上的点集 E_1:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \text{ 和 } 0$$

满足这个条件．这里 $E_1'=\{0\}$（单点集），$E_1''=\varnothing$.

134. 当 $n=2$ 时，参看上题．当 $n=3$ 时，我们可以作出相应的集 E. 例如，对每个形如$\frac{1}{i}$（这里 i 是自然数）的点，作一序列$\left\{\frac{1}{k}+\frac{1}{i}\right\}$, $k=1, 2, 3, \cdots$, 该序列收敛于点$\frac{1}{i}$. 那末，对一切形如$\left\{\frac{1}{k}+\frac{1}{i}\right\}$ $(k\geqslant1,\ i\geqslant1)$的点所成的集再加上点 0 就是所要求的 E_2. E_1（上题中作出的集）是 E_2 的导集：$E_2'=E_1$; 由此知

$$E_2''=E_1'=\{0\},\quad E_2'''=\varnothing$$

当 $n>3$ 时，可类似作出．一般，对任意 $n\geqslant2$，特别由一切形如$\left\{\frac{1}{i_1}+\frac{1}{i_2}+\cdots+\frac{1}{i_k}\right\}$和点 0（这里 $1\leqslant k<n$, 而分母 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 取遍一切可能的自然数 1, 2, 3, …）所组成的集 E_{n-1} 满足问题中要求的条件．容易证明，$E_{n-1}'=E_{n-2}$, 由此得出（按归纳法）$E_{n-1}^{(n-1)}=\{0\}$, $E_{n-1}^{(n)}=\varnothing$.

135. 集E是闭的．由一切形如$\frac{1}{n}$和 0 的数所成的集是E的导集，$E''=\{0\}$, $E'''=\varnothing$（参看上题）．

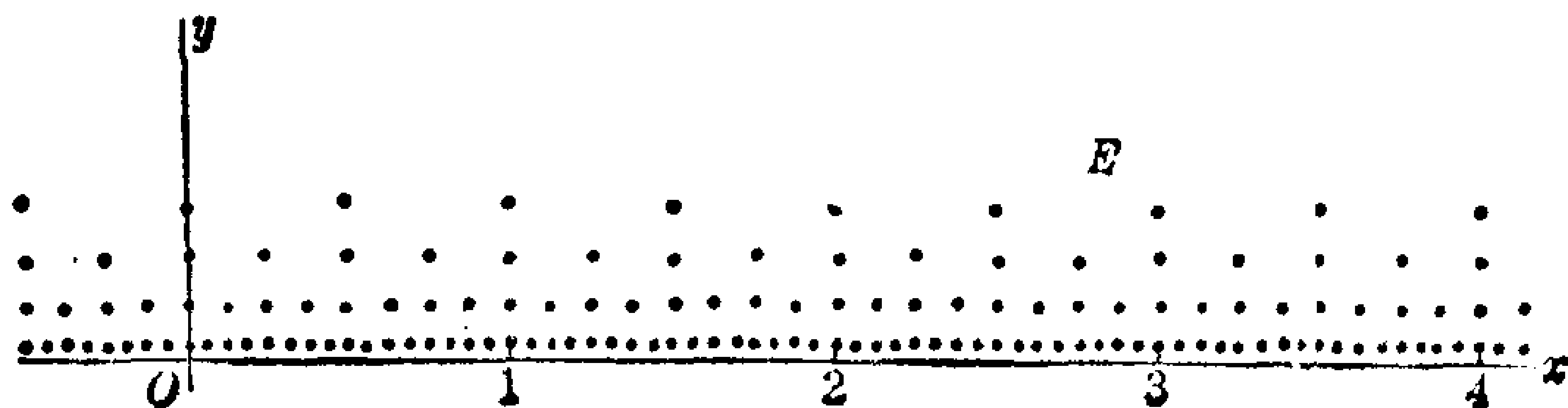


图 18

136. 例：由一切点$\left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$，$k$取一切整数，$n$取一切自然数组成的集$E$. 这里，$E'$是整个数轴$Ox$，而且，所给集中没有任何一点在$E'$中(图 18). 另外的例子在 288 题中引出.

137. 设a是E'的任一极限点. 我们证明a也是E的极限点. 作a的任意邻域$V_\varepsilon(a)$. 在该邻域含有E'中无穷多个点. 在这些点中任取一点，例如，$b\in E'$，作它的邻域$V_\delta(b)$，使其整个含于$V_\varepsilon(a)$中. 在$V_\delta(b)$中有无穷多个E中的点(因为，$b\in E'$，即是说b是E的极限点). 而$V_\delta(b)$中所有属于E的点当然也在$V_\varepsilon(a)$中；即是说，点a的任一邻域$V_\varepsilon(a)$含有E中的无穷多个点. 因而，a是E的极限点，即$a\in E'$. 这样，E'的任意极限点a都在E'中，这就说明集E'是闭的.

138. 因为E'是闭的(参看上题)，那末，它的一切极限点都在E'中，即$E''\subset E'$. 类似地$E'''\subset E''$等等.

139. 例：设A_k是平面上连接点$\left(\frac{1}{k}, 0\right)$和$\left(\frac{1}{k}, 1\right)$的闭线段. 那末，$A'_k=A_k$，$\bigcup\limits_k A'_k=\bigcup\limits_k A_k$，$\left(\bigcup\limits_k A_k\right)'=\left(\bigcup\limits_k A_k\right)\cup B$. 这里，$B$是连接点(0, 0)和(0, 1)的闭线段(图 19). 这时，$\left(\bigcup\limits_k A_k\right)'\supset\bigcup\limits_k A'_k$，而等式不成立. 一

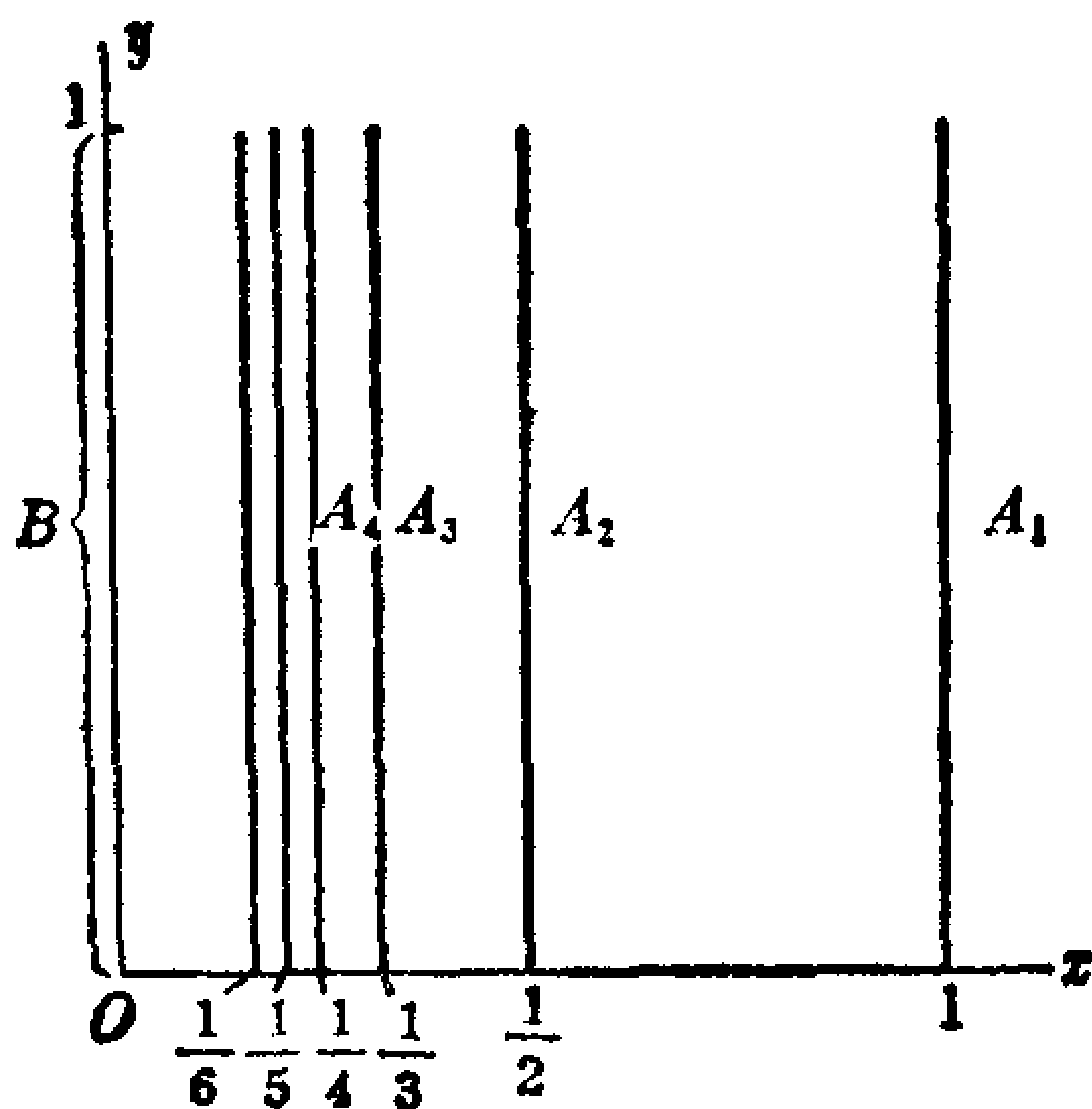


图 19

般，对任一序列集$\{A_k\}$有包含关系

$$\left(\bigcup_k A_k\right)'\supset\bigcup_k A'_k.$$

140. 不正确. 例: $A=\left\{1,\frac{1}{3}, \frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{2k-1},\cdots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{2k},\cdots\right\}$, 这里 $A\cap B=\varnothing$.

141. 所有问题的答案都是肯定的(参看,例如, 作为136题的解而建立起来的结果).

142. 例: 在闭区间$[0,1]$上作一集E_1,它由全部形如$\frac{1}{n}$(这里,$n=1,2,3,\cdots$)的点组成;在$[1,2]$上作一集E_2,它由全部形如$1+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$(这里$n_1=2,3,4,\cdots$; $n_2=2,3,4,\cdots$)的点组成;一般,在$[k-1,k]$上作集E_k,它由全部形如 $k-1+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}$ (这里, $n_1=k, k+1, k+2, \cdots$; $n_2=k, k+1, k+2,\cdots;\cdots; n_k=k,k+1,k+2, \cdots$)的点组成. 那末, 一切$E_k$之和$E$: $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 满足问题中的全部要求.

143. 将闭区间$[-1,0]$加到142题中作出的集E上就可以了. 这时,集$M=E\cup[-1,0]$,合 $M^{(j)}\neq M^{(i)}$, $i\neq j$, 且 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}M^{(k)}=[-1,0]\neq\varnothing$.

144. а) 空集和全平面. б) 在平面上的任意开集 (不同于空集和全平面). в) 任意既不开又不闭的集(例如,由满足 $0\leqslant x<1, 0\leqslant y<1$ 之点(x, y)组成的集). д) 在直线上的全部无理数组成之集.

145. 在这种点的任一邻域中既可以找到不属于集合的点(特别,此点本身)也可以找到集合中的点(因为这个点是极限点).

146. 设 $A=A_1\cup A_2$ 且 $x\in$ borne$A$. 那末,在点x的任一邻域中既有CA的点(这些点既不在A_1中,也不在A_2中), 又有A_1或者A_2中的点. 取半径为 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ 的点x的邻域序列, 且在每个这样的邻域中取出属于A_1或者A_2中的一点. 集A_1或者A_2,至少有一个(为了确定起见, 我们认为是集A_1)在无穷多个这样的邻域中有它的点,例如,在邻域

$$V_{\frac{1}{n_1}}(x),\ V_{\frac{1}{n_2}}(x),\cdots,\ V_{\frac{1}{n_k}}(x),\cdots$$

中. 那末,点x的任何邻域含A_1中的点;事实上,取任一邻域$V_r(x)$, 对某个$k\left(\text{取充分大的}\ k,\ \text{使}\ n_k>\frac{1}{r}\right)$, $V_r(x)$含有$V_{\frac{1}{n_k}}(x)$; 而$V_{\frac{1}{n_k}}(x)$至少含A_1中的

一点；因而，$V_r(x)$同样至少含 A_1 中的一点.

这样，点 x 的任意邻域既含有 A_1 中的点，也含有不属于 A_1 中的点. 于是，$x\in \text{borne}A_1$. 因而，

$$x\in(\text{borne}A_1)\cup(\text{borne}A_2),$$

即
$$\text{borne}A\subset(\text{borne}A_1)\cup(\text{borne}A_2).$$

如果A非二集之和，而是任意有限个集$A_1, A_2, \cdots, A_n$之和，证明是类似的.

如果 A 是无穷多个集之和，类似的结论不再成立. 例如，设 A_k 表在平面 Oxy 上由方程 $x=\frac{1}{k}$给出的直线，那末，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 以轴 Oy 上的全体点作为自己的边界；但这些点不是任何一个集 A_k 的边界.

147. 因为 $A_1\subset A_1\cup A_2$，那末$\overline{A_1}\subset\overline{A_1\cup A_2}$；类似地$\overline{A_2}\subset\overline{A_1\cup A_2}$；因而$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\subset\overline{A_1\cup A_2}$.

相反的包含式$\overline{A_1\cup A_2}\subset\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$ 可以像证明包含式 $\text{borne}(A_1\cup A_2)\subset(\text{borne}A_1)\cup(\text{borne}A_2)$那样的方法证明（参看上题的解）.

比较这些包含式即得出要求的等式 $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}=\overline{A_1\cup A_2}$.

关于无穷多个集的包含式 $\bigcup\limits_{\iota}\overline{A_\iota}\subset\overline{\bigcup\limits_{\iota}A_\iota}$ 像证明两个集之和的包含式 $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\subset\overline{A_1\cup A_2}$ 那样的方法证明.

148. 如果 A_1 和 A_2 是闭的，那末$\overline{A_1}=A_1$，$\overline{A_2}=A_2$；所以按前一题的结果（关于二集之和）有$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}=A_1\cup A_2$；因而，$A_1\cup A_2$ 是闭集.

对任意有限个集的证明是类似的.

149. 设 A_ι 是闭集. 我们证明 $\bigcap\limits_{\iota}A_\iota$ 也是闭集，即 $\overline{\bigcap\limits_{\iota}A_\iota}=\bigcap\limits_{\iota}A_\iota$.

一方面，显然有包含式 $\bigcap\limits_{\iota}A_\iota\subset\overline{\bigcap\limits_{\iota}A_\iota}$. 为了证明相反的包含式，考察任意点 $x\in\overline{\bigcap\limits_{\iota}A_\iota}$，在点 x 的任意邻域中有 $\bigcap\limits_{\iota}A_\iota$ 中的点；因而，在这个邻域中有每个集 A_ι 中的点. 这就意味着点是每个集 A_ι 的接触点，即 $x\in A_\iota$ 对每个 A_ι 成立（由于集 A_ι 是闭的），所以 $x\in\bigcap\limits_{\iota}A_\iota$，即是说 $\overline{\bigcap\limits_{\iota}A_\iota}\subset\bigcap\limits_{\iota}A_\iota$.

比较所得的包含式得出结果：$\overline{\bigcap\limits_{\iota}A_\iota}=\bigcap\limits_{\iota}A_\iota$；这即是说 $\bigcap\limits_{\iota}A_\iota$ 是闭

的.

150. 设 a 是 $\bar{E}$ 的接触点，我们证明 a 也是 E 的接触点. 首先，取任意邻域 $V(a)$，并在其中取点 $b\in\bar{E}$. 其次，作包含于 $V(a)$ 中的邻域 $V(b)$. 因为 $b\in\bar{E}$，那末，b 是 E 的一接触点. 因而，$V(b)$ 至少含 E 中的一点 而这点也在 $V(a)$ 中. 因此，点 a 的任意邻域 $V(a)$ 至少含 E 中的一点，这就是说 a 是 E 的接触点. 所以，$a\in\bar{E}$. 这样一来，就证明了集 $\bar{E}$ 的所有接触点都在 $\bar{E}$ 中，即 $\bar{E}$ 是闭的.

151. 如果序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 无界，那末，这些圆之并是闭的.

如果序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 有界，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=a$，那末，这些圆之并非闭；如果将半径为 a 的极限圆加到这些圆中就得到这些圆之并的闭包.

152. 这些圆的并非闭；如果 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=a>0$（如果 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$，则为一点，即公共中心），将半径为 a 的圆周加到已给的同心圆周中，就得到并的闭包.

153. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=+\infty$，这个集是闭集（这时，它同全平面重合）；如果 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=a<+\infty$，它非闭. 在这两种情况下，这个集都是开的.

154. 这个集不是完备的；加一点（坐标原点）到它里面去就得到完备集.

155. 用 C_n 表中心在地轴上，半径为 $\dfrac{7}{2\pi n}$ 公里，在北半球地表面上的圆周；该圆周长等于 $\dfrac{7}{n}$ 公里（图 20）. 用 B_n 表在地球表面上 C_n 之南 7 公里处的圆周. 那末，要求的集 E 是：

$$E=B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots\cup P_0,$$

这里 P_0 是一单点集（南极）.

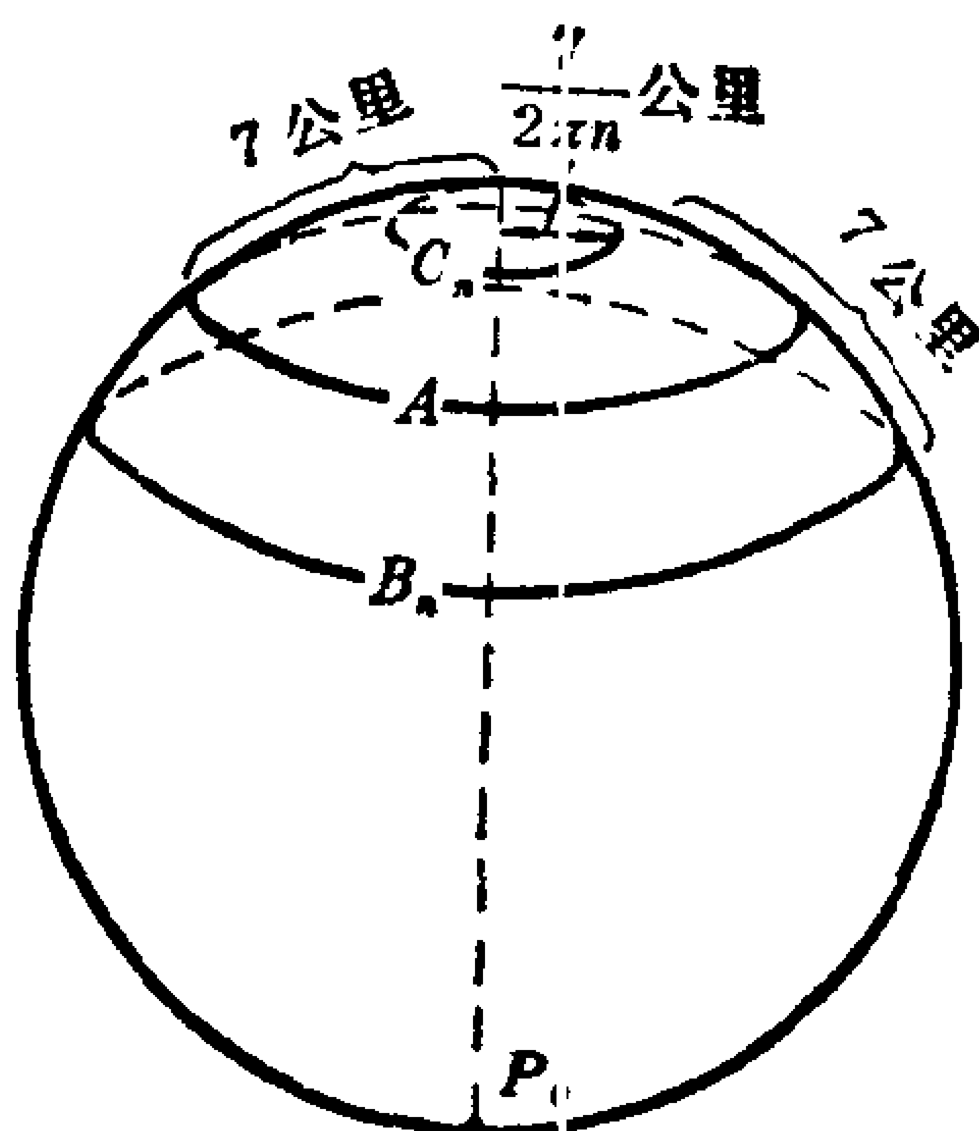


图 20

集 E 非闭. 除圆周 $B_1, B_2, \cdots$ 之外，在北极以南 7 公里处的圆周 A 上的一切点也是极限点（圆周 A 不在 E 中），所以，

$$\bar{E}=E\cup A,\quad E'=(E\cup A)\backslash P_0.$$

156. 设 ζ 是集 E_a 的极限点. 取收敛于 ζ 的序列 $\{x_n\}$（这里 $x_n\in E_a$）. 那末，$f(x_n)\geqslant a$，对一切 n. 根据 $f(x)$ 的连续性有 $f(\zeta)=\lim\limits_{x_n\to\zeta} f(x_n)$. 而由分析中知：如果序列中各项都大于或等于 a，那末，它的极限也大于或等于 a. 所

以. $\lim\limits_{x_n\to\zeta} f(x_n)\geqslant a$, 即是 $f(\zeta)\geqslant a$, 因而, $\zeta\in E_a$. 这意味着集 E_a 是闭的.

157. 设 $\varphi(t)$ 是集 E 的一极限元. 那末, 可以找到集 E 的元序列: $f_1(x)$, $f_2(x)$, …收敛于 $\varphi(x)$ (在空间 C 中收敛, 即当 $n\to\infty$ 时, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-\varphi(x)|\to 0$). 换句话说, $f_n(x)$ 一致收敛于 $\varphi(x)$. 而如果 $f_n(x)$ 一致收敛于 $\varphi(x)$, 则对每个 x, $x\in[0,1]$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\varphi(x)$. 因为, 对每个 $x\in[0,1]$, $A\leqslant f_n(x)\leqslant B$, 那末, 对极限也有 $A\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\leqslant B$, 即 $A\leqslant\varphi(x)\leqslant B$.

所以, $\varphi(x)\in E$. 这样一来, 集 E 的所有极限元都属于 E, 这就表示 E 是闭的.

158. 证明类似.

159. 不是(例如, 平面上相交一点的二闭区间).

160. 有限个完备集之和总为完备集; 可数个完备集之和不一定是完备集(参看下一题的例).

161. 例: 可数个闭区间组成的集之和

$$\left[1, 1\frac{1}{2}\right]\cup\left[1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right]\cup\left[1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}\right]\cup\cdots\cup\left[2-\frac{1}{2^n}, 2-\frac{1}{2^{n+1}}\right]\cup\cdots$$

这里每个集都是闭的(甚至是完备的), 而和非闭: 和是半闭区间 $[1,2)$.

162. 为此需证, 如果 p 是边界点集的接触点, 那末, 它本身也是已知集 E 的边界点(这一事实的证明和在 150 题中类似事实的证明相似).

163. 设 E 是已给的集, A 是它的一切内点组成的集(即 $A=\overset{\circ}{E}$). 设 $x_0\in A$ 是 A 的任意一点, 需证 x_0 是集 A 的内点. 为此, 作 x_0 的邻域 $V(x_0)$, $V(x_0)$ 含于 E 中(这是可能的. 因为 x_0 是集 E 的内点). 每个点 $x\in V(x_0)$ 都是集 E 的内点(因为, 可以取充分小的邻域 $V(x)$, 使 $V(x)$ 含在 $V(x_0)$ 中, 因此, 也含在 E 中). 所以, 一切点 $x\in V(x_0)$ 都是 A 中的点. 这即是说, x_0 是集 A 的内点. 这样一来, 集 A 的每个点都是它的内点, 即 A 是开集.

164. 这可以由 E 是集 A 中一切点的 ε-邻域的和得出:

$$E=\bigcup_{x\in A} V_\varepsilon(x).$$

165. 不正确. 例: E 为平面上的闭圆 D 和 D 外的一单点集之和集. 那末, $\overset{\circ}{E}=\overset{\circ}{D}$ 且 $\overline{\overset{\circ}{E}}=D$; 但 $E\neq D$.

但是, 对任何闭集 E 有包含式 $\overline{\overset{\circ}{E}}\subset E$.

166. 不正确(例: E 是挖去中心的开圆, 这里 $\overset{\circ}{\overline{E}}\neq E$). 但是, 对任何开集

E 包含式：$\mathring{\bar{E}} \supset E$ 正确.

167. 证明时需要利用下面的连续函数的性质：如果连续函数在点 x_0 处为正的，那末，它在这点的某个邻域内也是正的.

168. 设 $\varphi \in E$. 那末 $A < \varphi(x) < B$ 在 $[0, 1]$ 上各处成立. 记 $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi(x) = \beta$、$\inf\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi(x) = \alpha$. 显然，$\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi(x)$ 不可能等于 B. 因为，按在闭区间上连续函数的性质，$\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的某一点 x' 处达到：$\varphi(x') = \beta$. 而 $\varphi(x') < B$；因此，$\beta < B$. 同理 $\alpha > A$. 用 ε 表数 $\alpha - A$ 和 $B - \beta$ 中最小者. 那末，满足不等式 $\varphi(x) - \varepsilon < \chi(x) < \varphi(x) + \varepsilon$ 的全体函数 $\chi(x)$ 都属于集 E. 另一方面，全体这种函数 $\chi(x)$ 组成函数 $\varphi(x)$ 的 ε-邻域，因为，所有这些函数且只有这些函数满足条件：$\rho(\varphi, \chi) < \varepsilon$. 所以，函数 φ 的某一个邻域连同函数 φ 一起含在集 E 中，这即是说 E 是空间 C 中的开集.

169. 证明类似.

170. 例：设 E_k 是平面上中心在原点，半径为 $\frac{1}{k}$ 的开圆. 那末，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 是单点集(坐标原点). 它不是开集.

171. 将数轴上全部有理点编号：$r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots$ 且记 $G_k = I \setminus \{r_k\}$ (即 G_k 是从整个数轴上去掉一点 r_k 而得到)，每个 G_k 是开集，而一切 G_k 的交等于全部无理点组成的集. 所以，后一集是 G_δ 型集.

172. 设 $A = E \cup E'$，B 是包含 E 的一切闭集之交. 我们证明，无论什么集 E，恒有等式 $A = B$ 成立.

1) A 是包含 E 的闭集(参看 150 题)，因而，$A \supset B$.

2) 任意一个含 E 的闭集 F，也含有 E 的一切极限点；所以，$F \supset E \cup E'$，即 $F \supset A$. 那末，所有这些闭集 F 之交含 A，也就是说 $B \supset A$.

由 $A \supset B$ 和 $B \supset A$ 得 $A = B$.

173. 证明类似.

174. 每个集 E_n 都是闭的(参看 156 题).

在闭区间上的连续函数 $f(x)$ 是有界的(例如，$|f(x)| \leqslant N$, $x \in [a, b]$)；因而，当 $n > N$ 时，E_n 是空集. 所以，和 $E_1 \cup E_3 \cup \cdots \cup E_{2k-1} \cup \cdots$ 为有限个非空闭集之和，而这样的和是闭集.

175. 例：函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上是连续的. 这里，$E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup \cdots \cup$

$E_{2k-1}\cup\cdots=\left[\frac{1}{2},1\right]\cup\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{6},\ \frac{1}{5}\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{1}{2k},\ \frac{1}{2k-1}\right]\cup\cdots$,

而这个和在数轴上非闭.

176. 设 A_i 是 G_δ 型集, $A_i=\bigcap\limits_k A_{k,i}$, 这里 $A_{k,i}$ 是开集. 如果 $E=\bigcap\limits_i A_i$, 那末 $E=\bigcap\limits_{k,i} A_{i,k}$. 因而, E 是可数个开集 $A_{i,k}$ 之交, 即 E 是 G_δ 型集.

177. 设 A 和 B 是两个 G_δ 型集, $A=\bigcap\limits_i A_i$, $B=\bigcap\limits_k B_k$ (这里 A_i, B_k 是开集). 集 $E=A\cup B$ 可以表为 $E=(\bigcap\limits_i A_i)\cup(\bigcap\limits_k B_k)$, 应用两次分配律①得 $E=\bigcap\limits_k\{(\bigcap\limits_i A_i)\cup B_k\}=\bigcap\limits_k\{\bigcap\limits_i[A_i\cup B_k]\}=\bigcap\limits_{i,k}\{A_i\cup B_k\}$.

因为和 $A_i\cup B_k$ 是开集, 那末作为可数个开集之交的集 E 是 G_δ 型集.

我们证明了两个 G_δ 型的交是 G_δ 型集. 引用归纳法证明, 对任意有限个 G_δ 型集的交, 这个结论仍然成立.

178. 179. 证明是类似的.

180. 证明直接从下极限的定义得出.

181. 函数 $y=\ln(x^2+1)$ 是区间 E: $0\leqslant x<+\infty$ 上严格增的连续函数; 同时, 函数取值于射线 E_1: $0\leqslant y<+\infty$ 上. 任取一点 $y_0\in E_1$, 作 y_0 的任一邻域 $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$② 我们证明, 在邻域中至少有一形如 $\ln(1+r^2)$ (这里 r 是有理数) 的点.

根据连续函数的性质知道, 在 Ox 轴的集 E 上可以找到点 x_1 和 x_2 $(x_1<x_2)$, 使

$$\ln(1+x_1^2)=y_0-\varepsilon,\ \ln(1+x_2^2)=y_0+\varepsilon.$$

在 x_1 和 x_2 之间至少有一有理点, 记它为 r: $x_1<r<x_2$. 因为函数 $\ln(1+x^2)$ 在 E 上严格增, 那末 $\ln(1+x_1^2)<\ln(1+r^2)<\ln(1+x_2^2)$, 即 $y_0-\varepsilon<\ln(1+r^2)<y_0+\varepsilon$. 所以, 在每个点 $y_0\in E_1$ 的任意小的邻域内都可以找到形如 $\ln(1+r^2)$ 的点, 即是说, 这种形式的点组成之集在 E_1 上稠密.

---

① 参看第一章引言中之公式(2).

② 不用说, $\varepsilon>0$ 应取得充分地小, 使这个邻域在射线 E_1 上. 如果 $y_0=0$, 则用半邻域 $(0,\varepsilon)$ 代替邻域.

182. 183. 证明类似.

184. 闭包是射线$[0, +\infty)$；事实上，任意开区间(α,β)（这里$0\leqslant\alpha<\beta$）含形如$\frac{p^2}{q^2}$的数（这个数容易找到：首先找一有理数$\frac{p}{q}$，使得$\sqrt{\alpha}<\frac{p}{q}<\sqrt{\beta}$，然后平方，于是得$\alpha<\frac{p^2}{q^2}<\beta$）.

185. 闭包是射线$[1, +\infty)$.

186. 闭包是闭区间$[0, 1]$.

187. 证明如同解181题一样.

188. 不能. 例：二开区间之和集$\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4},1\right)$具有指出的性质，但不在$[0, 1]$上稠密. 还可举出一例，具指出的性质且在单位区间上无处稠密. 例如，在闭区间$[0, 1]$上的集$E=D\setminus D_1$，这里，D是康托集，而D_1是它的余区间的端点组成的集.

189. 将全部素数：$p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7, \cdots$编号，并记一切形如$r+\sqrt{p_k}$（这里$r$取遍所有的有理数，而$p_k$固定）的数全体组成之集为$E_k$. 那末，每个$E_k$是可数的且在直线上处处稠密（$E_k$由全部有理数集平移$\sqrt{p_k}$而得到）. 我们证明集$E_k$两两不相交.

设$k\neq i$，因而，$p_k\neq p_i$. 从集E_k中任取一元$\zeta=r_1+\sqrt{p_k}$和从集E_i中任取一元$\eta=r_2+\sqrt{p_i}$. 我们证明$\zeta\neq\eta$. 设$\zeta=\eta$；那末，$r_1+\sqrt{p_k}=r_2+\sqrt{p_i}$，由此得出$(r_1-r_2)^2=(\sqrt{p_i}-\sqrt{p_k})^2$或$\sqrt{p_ip_k}=\frac{p_i+p_k-(r_1-r_2)^2}{2}$；我们得到一个明显不正确的结果（任何两个不同的素数的乘积的平方根是有理数）. 因而，设$\zeta=\eta$是不正确的. 即是说，当$i\neq k$时，$E_i\cap E_k=\varnothing$.

190. 设$k>0$是一整数. 那末，存在这样的整数n_k使得$n_k<k\zeta<n_k+1$；记$x_k=-n_k+k\zeta$；显然，对一切自然数k有$0<x_k<1$.

现在取任一开区间u，我们证明，在这个区间中能找到形如$m+n\zeta$的数. 设i是使$\frac{1}{i}<|u|$（$|u|$表开区间u的长度）的自然数. 那末，在数$x_1, \cdots, x_{i+1}$中至少有两点，其间的距离小于$\frac{1}{i}$：

$$|x_{k_1}-x_{k_2}|<\frac{1}{i},$$

设$x_{k_1}>x_{k_2}$，有

$$0<x_{k_1}-x_{k_2}<\frac{1}{i}.$$

记 $\delta = x_{k_1} - x_{k_2}$，用点：

$$\cdots, -3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \cdots$$

分全直线．因为 $0<\delta<|u|$，那末，这些点中至少有一点（例如，$p\delta$，p 是整数）落在开区间 u 中．而

$$p\delta = p(x_{k_1} - x_{k_2}) = p[(-n_{k_1} + k_1\zeta) - (-n_{k_2} + k_2\zeta)] = m + n\zeta$$

因而，正好，被取出的开区间 u 至少含有形如 $m+n\zeta$（m, n 是整数）的一个点；这即是说，这种形式的数所成之集在直线上处处稠密．

191. 是．证明方法如同前一题，只是在选择时需使 $\frac{1}{i}<\frac{|u|}{2}$．那末，序列…，$-3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \cdots$ 中至少有两个相邻的点落在开区间 u 中，即是说，可以找到这样的偶数 p 使得 $p\delta\in u$．因而，在任意区间 u 中，一定有形如 $m+n\zeta$（m, n 是偶数）的数；即是说，这种形式的数集在直线上处处稠密．

192. 设存在弧 $\Delta_0\subset\Gamma$，不含集 M 中的点．我们用 Δ_k 表由弧 Δ_0 旋转 k 弧度后而得到的弧．显然，如果 Δ_0 不含 M 中的点，那末 Δ_k（对任意整数 k）也不含 M 中的点．

弧 $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_k, \cdots$ 有相同的长度且都在一有限长度的圆周 Γ 上，因而，它们不可能不相交．设，例如，$\Delta_{i_0}\cap\Delta_{i_0+m}\neq\varnothing$．同时，$\Delta_{i_0}\neq\Delta_{i_0+m}$（因为，由于 π 是无理数，角 m 不可能是 2π 的倍数角）．

由 $\Delta_{i_0}\cap\Delta_{i_0+m}\neq\varnothing$ 得知，当任意 Δ_k 旋转一个 m 弧度角而得到的弧 Δ_{k+m} 同 Δ_k 之交为非空集．特别，序列：

$$\Delta_{i_0}, \Delta_{i_0+m}, \Delta_{i_0+2m}, \cdots$$

中任意两个相邻的弧之交非空．而这些弧之和覆盖了整个圆周 Γ，这不可能，因为 $\Gamma\supset M$，而任何一个 Δ_k 不含 M 中的点（图 21）．

所以，在圆周 Γ 上不存在不含集 M 中之点的弧，即是说 $\overline{M}=\Gamma$．

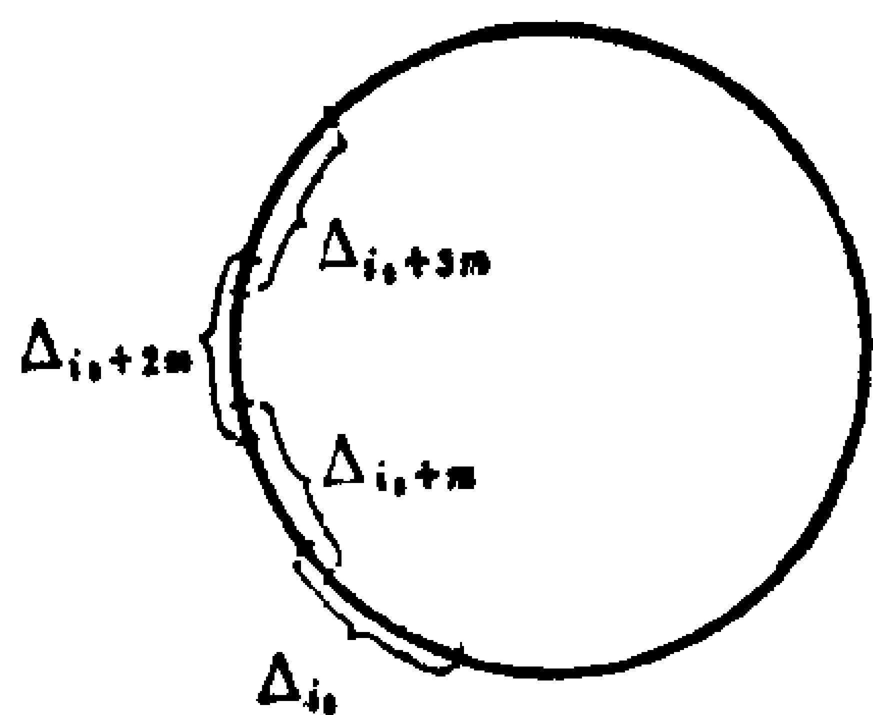


图 21

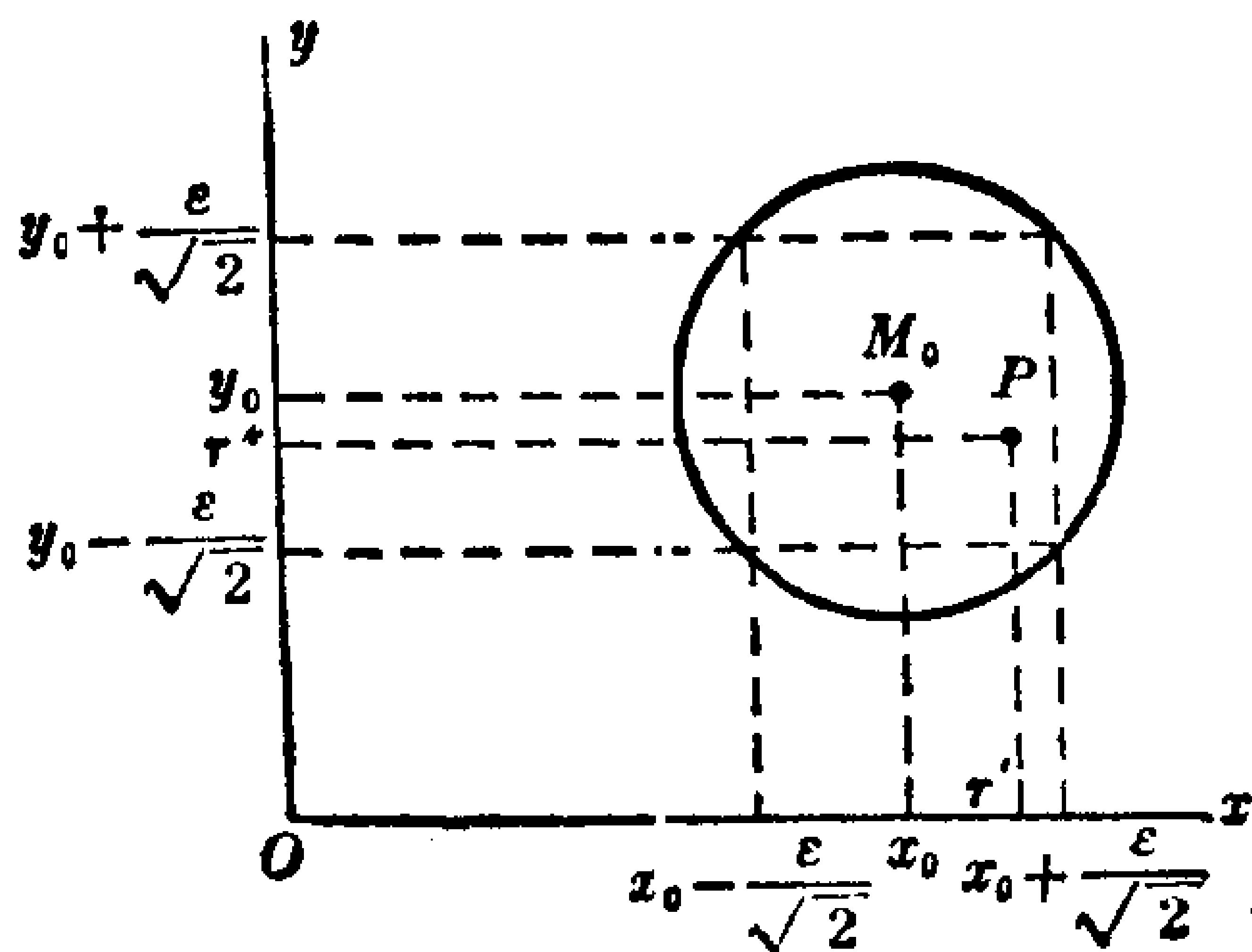


图 22

193. 对平面 Oxy 上的任意一点 $M_0(x_0, y_0)$ 作任意的 ε-邻域. 这个邻域含有有理点 $P(r', r'')$, 这里

$$x_0-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}<r'<x_0+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\quad y_0-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}<r''<y_0+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

(图 22). 所以, 有理点集在平面上稠密.

194. 设 $\varphi(x)$ 是 $C[0, 1]$ 中任意一函数, $V_\varepsilon(\varphi)$ 是该函数的 ε-邻域(这里, $\varepsilon>0$ 是任意数). 根据 C 中距离的定义, 邻域 $V_\varepsilon(\varphi)$ 由一切满足 $\varphi(x)-\varepsilon<\chi(x)<\varphi(x)+\varepsilon$ 的函数 $\chi(x)$ 组成. 根据维尔斯特拉斯第一定理 (参看第九章引言中的定理 1), 存在这样的多项式 $P(x)$, 使 $\varphi(x)-\varepsilon<P(x)<\varphi(x)+\varepsilon$; 这样一来, 一切多项式组成之集在 C 中稠密.

195. 设 $\varepsilon>0$ 是任一正数, 对任意 $\varphi(x)\in C$, 可以找到这样的多项式 $P(x)$, 使 $\rho(\varphi, P)<\frac{\varepsilon}{2}$ (维尔斯特拉斯第一定理). 设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 用满足 $|a_i-b_i|<\frac{\varepsilon}{2(n+1)}$ 的有理数 b_i 代替 $P(x)$ 中的 a_i, 且用 $Q(x)$ 表以有理数 b_i 为系数的多项式:

$$Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n.$$

那末

$$\begin{aligned}|P(x)-Q(x)| &= |(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+\cdots+(a_n-b_n)x^n|\\ &\leqslant |a_0-b_0|+|a_1-b_1|\cdot|x|+\cdots+|a_n-b_n|\cdot|x^n|\\ &\leqslant |a_0-b_0|+|a_1-b_1|+\cdots+|a_n-b_n|\\ &<\frac{\varepsilon}{2(n+1)}(n+1)=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

因而, $\rho(P, Q)<\frac{\varepsilon}{2}$. 但

$$\rho(\varphi, Q)\leqslant\rho(\varphi, P)+\rho(P, Q)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以, 有理系数多项式集在 $C[0,1]$ 中稠密.

196. 我们称挖去开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 之后余下的闭区间 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 为第一秩闭区间; 称挖去开区间 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 后余下的闭区间 $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ 为第二秩闭区间, 等等; 一般地, 第 n 秩闭区间的长度为 $\frac{1}{3^n}$; 为了得到 $n+1$ 秩闭区间, 只需从每个 n 秩闭区间中挖去中心在

闭区间中点，长度为 $\frac{1}{3^{n+1}}$ 的开区间即可．注意，对每个 n，一切 n 秩闭区间之和覆盖了康托集 D.

为了证明 D 在直线上无处稠密，只须证明，对任意开区间含有另一开区间，该开区间不含集 D 中的点．随便取一开区间 $I=(\alpha,\ \beta)$．如果它不含 D 中的点，那末，I 本身就取作含在 I 内的这种区间．如果有点 $x_0\in D$ 含在 I 中，那末，可以找到一 n 秩闭区间，它含点 x_0 且本身含在 I 中(图 23)．我们取以这个闭区间的中点为中心的，长度为 $\frac{1}{3^{n+1}}$ 的开区间．这个开区间不含 D 中的点且同时含于 I 中．

因而，D 在直线上无处稠密．

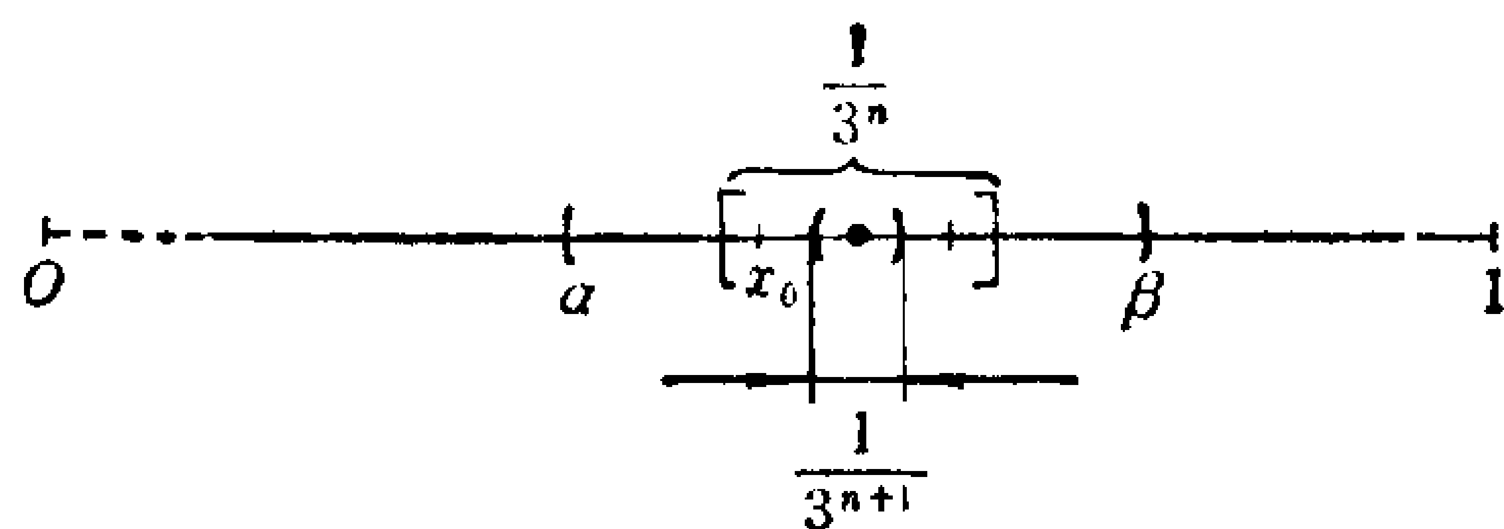


图 23

197. 作 C 中任一元 φ 的任意邻域 $V_\varepsilon(\varphi)$，如果 $\varphi\not\equiv\text{const}$，那末，在 $V_\varepsilon(\varphi)$ 中可以找到一个更小的邻域 $V_{\varepsilon_1}(\varphi)$，它完全不含常量函数．取小于 $\frac{|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|}{2}$ 的任意数作为 ε_1 就行了，这里 x_1, x_2 是 $[0,\ 1]$ 上的任意点，使得 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$ (图 24)．

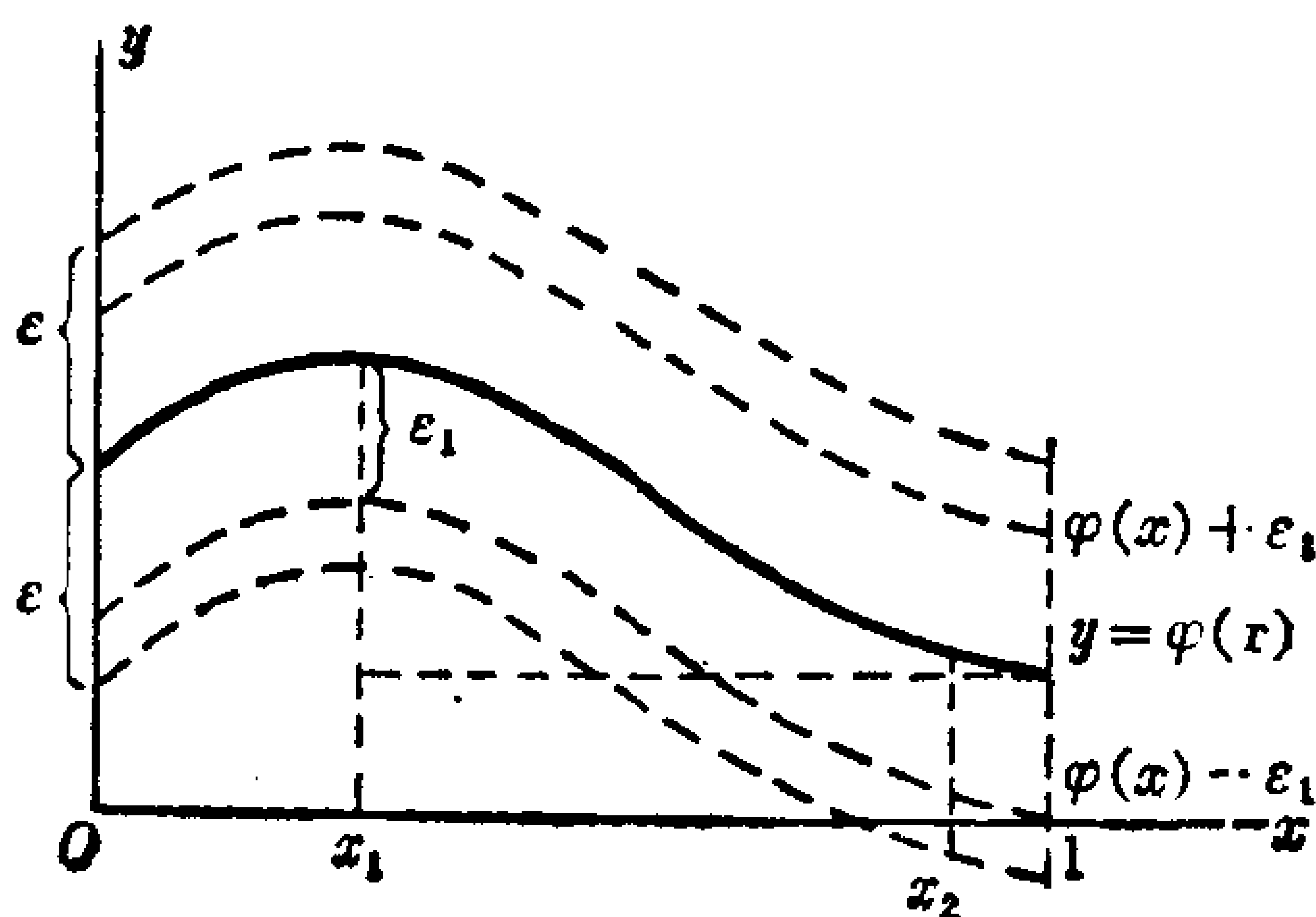


图 24

如果 $\varphi\equiv b(b=\text{const})$，那末，在 Oy 轴上的开区间 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 上，可以找到含于其中的开区间 $(\alpha,\ \beta)$，完全不含康托集 D 中的点．那末，满足

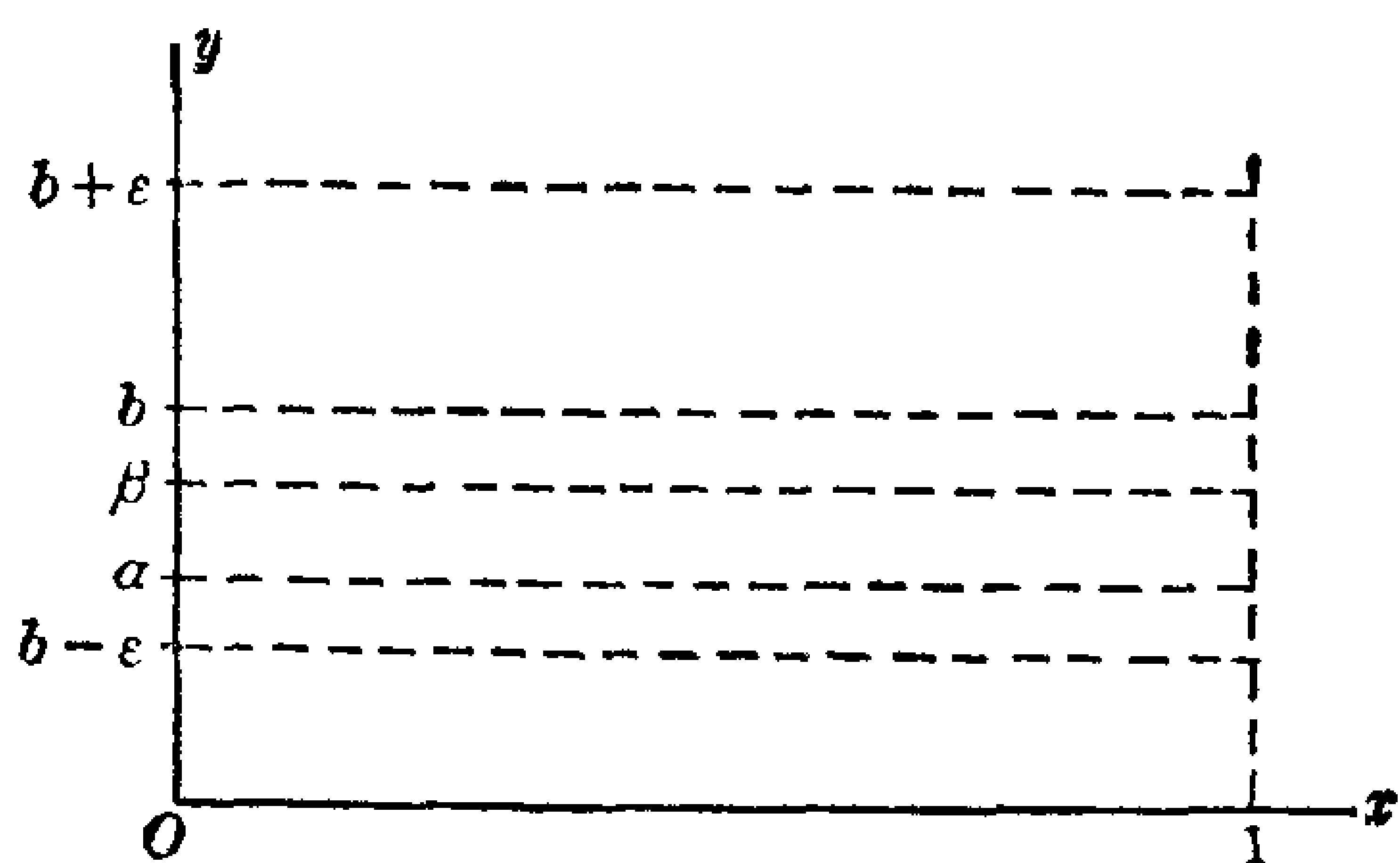


图 25

$\alpha<\chi(x)<\beta$ 的函数 $\chi(x)$ 组成的集是空间 C 中属于 $V_\varepsilon(\varphi)$ 而又完全不含集 E 中之元的某一邻域(图 25).

所以, E 在 C 中无处稠密.

198. 证明类似.

199. 证明 E 在直线上无处稠密同证明康托集的无处稠密性的方法相同(参阅 196 题).

200. 这个集可以用下面的方法作出: 分线段为 10 等分, 去掉开区间 $(0.4, 0.6)$; 然后将余下的每一个一秩闭区间: $[0, 0.1]$, $[0.1, 0.2]$, $[0.2, 0.3]$, $[0.3, 0.4]$, $[0.6, 0.7]$, 等等分成 10 等分, 并在它们中间的每一个中, 去掉中间的两个开区间(连同它们的分点), 即从闭区间 $[0, 0.1]$ 中去掉开区间 $(0.04, 0.06)$, 从闭区间 $[0.1, 0.2]$ 中去掉开区间 $(0.14, 0.16)$, 等等. 接着, 将余下的每个 2 秩闭区间: $[0, 0.01]$, $[0.01, 0.02]$, $[0.02, 0.03]$, $[0.03, 0.04]$, 等等分成 10 等分, 且去掉中间的两个区间(连同分点), 等等.

证明 E 在直线上无处稠密, 与证明康托集类似的事实相同(参看 196 题).

201. 这个集在直线上无处稠密(证明类似 200 题).

202. 这个集非闭. 它的闭包由 $[0, 1]$ 上的十进位小数的展式可以没有数字 5 的那些点(不仅有无理点, 而且也有有理点)组成. 不管所给集本身, 或是它的闭包都不含孤立点. 不管所给集本身, 或是它的闭包在直线上都无处稠密.

203. 设 A 无处稠密, I 是直线上任一开区间, 而 I_1 是含于 I 中且不含集 A 中之点的开区间. 那末, I_1 也不含集 A 的极限点(事实上, 如果 $x_0\in I_1$ 是 A 的极限点, 那末, 在点 x_0 的任意邻域中, 特别完全在 I_1 中的那些邻域中, 可

以找到 A 中的点，这与开区间 I_1 的定义矛盾)．因而，任何开区间 I 含有一开区间 I_1，I_1 中无 $\bar{A}$ 中的点(即无闭包中的点)．所以，$\bar{A}$ 在直线上无处稠密.

204. 直接证明不难．逆命题不真．例：有理点集在直线上处处稠密，而其余集非无处稠密集.

205. 这个论断正确．证明，设 E 处处稠密，那末，任意区间 I 含有 E 中的点 x_0．因 E 是开的，于是邻域 $V_\varepsilon(x_0)$ 与 x_0 均含在 E 中　开区间 I 和邻域 $V_\varepsilon(x_0)$ 的公共部分 I_1 是含于 I 中且仅由集 E 的点组成的开区间．由此知开区间 I_1 不含集 CE 中的点；因而，任意开区间 I 含子开区间 I_1，I_1 中不可能有集 CE 中的点．即是说，CE 在直线上无处稠密.

206. 必要条件是显然的(不仅对闭集，而且对直线上任何无处稠密集)．充分性证明如下：如果 E 闭，任何含点 $x_0\in CE$ 的开区间 I，那末它也含某一邻域 $V_\varepsilon(x_0)\subset CE$(因为，$CE$ 是开的)．即是说，任何开区间 I 含子区间 $V_\varepsilon(x_0)$，$V_\varepsilon(x_0)$ 不含集 E 中的点．因而，E 无处稠密.

208. 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是直线 R 上的无处稠密集．设 (a, b) 是直线上任一开区间．因为 E_1 在 R 中无处稠密，那末可以找到一开区间 (α_1, β_1)，它含在 (a, b) 中且不含 E_1 中的点．其次，因为 E_2 无处稠密，那末在 (α_1, β_1) 中可以找到一开区间 (α_2, β_2)，不含 E_2 中的点；因为 $(\alpha_2, \beta_2)\subset(\alpha_1, \beta_1)$，所以 (α_2, β_2) 也不含集 E_1 中的点；类似地可作出开区间 $(\alpha_3, \beta_3)\subset(\alpha_2, \beta_2)$ 且不含 E_1, E_2, E_3 中的点．继续这一过程，n 步之后，我们得到开区间 (α_n, β_n)，它不含 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 中的点．因而，不含集 F 中的点，而且，

$$(\alpha_n, \beta_n)\subset(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})\subset\cdots\subset(\alpha_1, \beta_1)\subset(a\ b).$$

所以，任意开区间 (a, b) 含开区间 (α_n, β_n)，(α_n, β_n) 完全不含集 F 中的点．因而，F 在直线 R 上无处稠密．如果 R 不是直线，而是其他空间，那末，证明是类似的.

上述证明的结论，对可数个无处稠密集之和不再为真．例：将直线上的全部有理数编号：$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$，作单点集 $E_k(k\geqslant 1)$：$E_k=\{r_k\}$，那末，每个 E_k 在直线上无处稠密，但 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$(全体有理数集)不是无处稠密集.

第六章　开集与闭集(续)

209. 不能．例如，有这样的序列 $\{a_n\}$，其足码为 $n=1, 2, 4, 8, 16, \cdots$,

2^i, …的项均为 1, 而其余的项都是零. 则题中已知的全部子序列都收敛于零. 但该序列$\{a_n\}$是发散的.

210. 取任意的 $\varepsilon>0$, 如果 N_1 是这样的数, 当 $m_k>N_1$ 时, $|a_{m_k}-b|<\varepsilon$ 成立. 而 N_2 是这样的数, 当 $n_i>N_2$ 时, $|a_{n_i}-b|<\varepsilon$ 成立. 那末对所有的 $n>N$(其中 $N=\max(N_1,N_2)$), 有 $|a_n-b|<\varepsilon$. 这就表示$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$.

211. 序列

$$f_0(x)=\sin x,\ f_1(x)=\sin 2x,\ f_2(x)=\sin 4x,\ \cdots,$$
$$f_i(x)=\sin 2^i x,\ \cdots \tag{1}$$

在空间 $C[0,2\pi]$ 中是有界的(这里, 对于任意的 i, $\rho(f_i,0)=1$). 因为这序列的任意两项间的距离不小于 1:

$$\rho(f_i,f_k)\geqslant 1 \qquad (\text{当 } i\neq k).$$

不仅该序列,而且它的任何子序列都不可能在$C[0,2\pi]$中收敛.

为了证明 $\rho(f_i,f_k)\geqslant 1$ $(i<k)$, 我们注意, 当 $x=\dfrac{\pi}{2^{i+1}}$时, $f_i(x)=\sin 2^i x$ 等于 1. 而在同样的 x 处, 函数 $f_k(x)=\sin 2^k x$ 等于零, 因此

$$\rho(f_i,f_k)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_i(x)-f_k(x)|\geqslant\left|f_i\left(\frac{\pi}{2^{i+1}}\right)-f_k\left(\frac{\pi}{2^{i+1}}\right)\right|=1.$$

因而,已知的序列、以及它的子序列都不是基本序列. 这意味着它们都发散.

212. 1. 设$\{x_n\}$是 E 中的基本序列, 则它也为 R 中的基本序列. 因为由条件知道 R 是完备的, 那末这个序列有属于 R 的极限: $\lim x_n=a$(此处 $a\in R$). 我们将证明 $a\in E$. 事实上, 在点 a 的任意邻域内有 E 中的点(即序列$\{x_n\}$的从某号码开始的所有项), 这表示 a 是 E 的接触点. 又因 E 是闭的, 所以 $a\in E$.

因而在 E 中任一基本序列都有属于 E 的极限. 这表示 E 是完备空间.

212. 2. 如 E 在 R 中不是闭的, 则在 E 中有收敛于某元 $a\in R$ 的序列$\{x_n\}$, 且 $a\bar{\in}E$. 此序列在 R 中是基本的(因为每一收敛序列为基本序列); 因而在 E 中它也是基本的. 但它没有属于 E 的极限: 如果有这样的极限 $b\in E$, 则在空间 R 中的序列$\{x_n\}$有两个不同的极限 a 和 b, 这是不可能的. 因此, 在 E 中能找出一基本列, 其极限不属于 E. 这表示 E 是不完备的.

212. 3. 把间断函数 $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$ 当作一元加于 C_1 上. 用等式 $\rho(\varphi,f)=\int_{-1}^{1}|\varphi(x)-f(x)|dx$ 定义 $\varphi(x)$ 与任意函数 $f(x)\in C_1$ 间的距离. 用 R 表示

$\varphi(x)$加上 C_1 所得的空间. 那末, C_1 是空间 R 的非闭子集. 事实上, 在 C_1 中有序列 $f_n = \sqrt[2n-1]{x}$ 收敛于 $\varphi(x)$, (按空间 R 的尺度意义). 且 $\varphi(x)$不属于 C_1, 因而 C_1 在 R 中非闭, 由前题的结果, 它是非完备的.

212. 4. 提示. 设$\{f_n(x)\}$是 $C[a, b]$中的基本序列. 首先证明它在每点 $x_0 \in C[a, b]$收敛, 然后证明它是一致收敛的, 由此推出极限函数 $\varphi(x)$是连续的, 且当 $n\to\infty$时, $\rho(\varphi, f_n)\to 0$.

212. 5. 利用 212.1, 212.4 和 157 题的结果.

212. 6. 利用 212.1, 212.4 和 158 题的结果.

213. 能. 参看解 136 题而引出的例.

214. 不可能. 因为平面上的任何不可数集至少有一个属于该集的凝聚点.

215. 证明方法已在题中指出.

216. 显然, 集 A_1 的每一凝聚点和集 A_2 的每一凝聚点同时也是和 $A_1 \cup A_2$ 的凝聚点. 因而, 如果用 C 表示 $A_1 \cup A_2$ 的凝聚点所成之集, 那末就有 $B_1 \cup B_2 \subset C$. 现在来证明反向包含式 $C \subset B_1 \cup B_2$.

设 $x_0 \in C$ 是集 $A_1 \cup A_2$ 的凝聚点, 作一趋于零的, 递减的正数列 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots$.

我们研究邻域集

$$V_{\varepsilon_1}(x_0) \supset V_{\varepsilon_2}(x_0) \supset V_{\varepsilon_3}(x_0) \supset \cdots, \quad (1)$$

它们中的每一个含 $A_1 \cup A_2$ 中的点是不可数的(因为 x_0 是 $A_1 \cup A_2$ 的凝聚点). 这时, 例如邻域集的第一个 $V_{\varepsilon_1}(x_0)$包含一个不可数集, 该不可数集或由A_1, 或由A_2 中的点组成(因为, 该邻域不可能既只有A_1 中有限或可数个点, 又只有 A_2 中的有限或可数个点. 否则, 它含 $A_1 \cup A_2$ 中的点所成的集至多为可数集). 同样的讨论可应用于邻域 $V_{\varepsilon_2}(x_0)$与 $V_{\varepsilon_3}(x_0)$, 等等. 设序列(1)中的无限个邻域

$$V_{\varepsilon_{k_1}}(x_0),\ V_{\varepsilon_{k_2}}(x_0),\ V_{\varepsilon_{k_3}}(x_0), \cdots, V_{\varepsilon_{k_n}}(x_0), \cdots$$

含有 A_1 中的不可数的点. 即点 x_0 的任何邻域含有 A_1 中的不可数的点集. 事实上, 任意的邻域 $V_r(x_0)$包含 $V_{\varepsilon k_n}(x_0)$(只要足码 ε_{k_n} 取得这样的大, 使 $\varepsilon_{k_n} < r$ 即可). 但 $V_{\varepsilon k_n}(x_0)$ 含有 A_1 中的不可数点集, 因而对任取的邻域 $V_r(x_0)$也是如此.

从而, x_0 是 A_1 的凝聚点(或者, 如果在(1)中的无穷多个邻域中含有 A_2 的不可数点集, 则 x_0 为 A_2 的凝聚点). 这表示 $x_0 \in B_1 \cup B_2$; 因 x_0 为 C 的任意

一点，则有 $C\subset B_1\cup B_2$.

与前面得到的包含式 $B_1\cup B_2\subset C$ 相比较，就有 $C=B_1\cup B_2$.

217. 不能. 例如，我们研究平面上以$\frac{1}{n}$为半径的同心圆周 A_n 所成的序列. 每一集 A_n 的凝聚点集 B_n 与 A_n 重合. 但是，和 $\bigcup\limits_n A_n$ 的凝聚点集 C 不与 $\bigcup\limits_n B_n$ 重合，而把公共圆心这一点加于 $\bigcup\limits_n B_n$ 上才得到集 C. 因而在这种情况下，$C\supset\bigcup\limits_n B_n$，但 $C\neq\bigcup\limits_n B_n$.

显然，包含式 $C\supset\bigcup\limits_n B_n$ 总是正确的（要知道，每一项 A_n 的任一凝聚点同时也是其和的凝聚点）.

218. 等式$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\varnothing$等价于集 $A\cap\bar{B}$ 与 $\bar{A}\cap B$ 都为空集. 条件 $A\cap\bar{B}=\varnothing$ 就意味着 A 不含 B 的接触点；而条件 $\bar{A}\cap B=\varnothing$ 表示 B 不含 A 的接触点. 由此得出 E 为非联络集等价于 E 可表为两集 A, B 之和 $E=A\cup B$（其中 A, B 非空），且$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\varnothing$.

219. 设 E 为闭集.

如果 $E=A\cup B$，这里 A 和 B 是非空的、不相交的闭集，则$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\varnothing$（因为这时 $A=\bar{A}$, $B=\bar{B}$, $A\cap B=\varnothing$），因而 E 是非联络集.

我们现证其逆命题. 假设闭集 E 为非联络集，即 $E=A\cup B$，这里

$$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\varnothing \tag{1}$$

且 $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$. 将要证明 A 和 B 均为闭集.

因 $A\subset\bar{A}$, $B\subset\bar{B}$，则 $\bar{E}=\bar{A}\cup\bar{B}\supset A\cup B=E$，但$E=\bar{E}$（因 E 是闭集），由此

$$\bar{A}\cup\bar{B}=A\cup B \tag{2}$$

假定 A 不是闭集且 $x\in\bar{A}\setminus A$. 因 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$，由等式(2)得出 $x\in A\cup B$. 而 $x\bar{\in}A$，表示 $x\in B$. 因而 $x\in B$ 和 $x\in\bar{A}$. 从而集 $\bar{A}\cap B$ 非空，这与条件(1)矛盾. 所以，集 A 是闭的. 类似证明 B 也是闭的. 由于集 A 与 B 均为闭集，故对它们而言等式(1)等价于 $A\cap B=\varnothing$.

这样一来，如果集 E 是闭的，且非联络的，则可把它表为两个不相交的闭集 A 与 B 的和. 由已证明的事实立即得出蕴涵在条件中之断言.

220. 设 E 为联络集. 将证明 $\bar{E}$ 也是联络集. 假定 $\bar{E}$ 不为联络集，则有二个非空的闭集 A 与 B，且 $A\cup B=\bar{E}$. 我们研究集 $A_1=A\cap E$, $B_1=B\cap E$.

它们都不是空的(如果 $A_1=A\cap E$ 是空的, 则有包含式 $E\subset B\subset\bar{E}$, 其中 B 是异于 $\bar{E}$ 的闭集. 由 172 题的结果, 这是不可能的). 此外, $A_1\cup B_1=E$. 同时 $A_1\cap\bar{B}_1\subset A\cap B=\varnothing$ (因 $A_1\subset A$, $B_1\subset B$ 且 $\bar{B}=B$), 因而 $A_1\cap\bar{B}_1=\varnothing$. 同样可证 $\bar{A}_1\cap B_1=\varnothing$. 那末 $(\bar{A}_1\cap B_1)\cup(A_1\cap\bar{B}_1)=\varnothing$, 它表示集 E 是非联络的, 这与条件矛盾.

因此, 只要假定 $\bar{E}$ 是非联络的集, 就会导致出矛盾; 从而集 $\bar{E}$ 是联络的.

其逆命题不真. 例: 设 E 为直线上一切有理数所成之集, 那末 E 是非联络的, 但 $\bar{E}$ 却是联络的.

221. 假定闭区间 $[a, b]$ 表成了两个非空的闭集 F 与 Φ 之和: $[a, b]=F\cup\Phi$. 我们来证明: 它们的交不可能是空的.

我们平分闭区间 $[a, b]$. 把既含有 F 的点, 又含有 Φ 的点的那一半闭区间称为第一次选中的闭区间[①], 且用 $[a_1, b_1]$ 来表示它. 又把它分成两等份. 把既含有 F 中的点, 又含有 Φ 中的点的那一半叫做第二次选中的闭区间, 且用 $[a_2, b_2]$ 来表示它. 这个过程不断进行下去, 我们得到闭区间套序列

$$[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots\supset[a_k, b_k]\supset\cdots$$

它们的长趋于零, 而且这些闭区间中的每一个既有 F 中的点又有 Φ 中的点. 用 c 表示这一切闭区间的公共点, 它的任意邻域含有某个选中的闭区间, 即是在 c 的任意邻域内既可找到 F 的点, 又可找到 Φ 的点, 那末 c 既是 F 的、又是 Φ 的接触点. 这两个集又是闭的, 因而它们含有自己的所有接触点, 因此 $c\in F$ 和 $c\in\Phi$, 这表示 $c\in F\cap\Phi$, 即是说, 交 $F\cap\Phi$ 非空.

这样一来, 便证明了闭区间 $[a, b]$ 不能表为两个非空的、不相交的闭集之和. 因而闭区间是联络集.

222. 1) 假如闭圆 E 是两个非空的、不相交的闭集之和: $E=F\cup\Phi$. 设 a 是 F 的任一点, b 为 Φ 的任一点(图 26), 用线段 $[a, b]$ 来联结这两点, 显然, 它全部属于圆 E[②]. 这时

$$[a, b]=F_1\cup\Phi_1,$$

其中 $F_1=F\cap[a, b]$, $\Phi_1=\Phi\cap[a, b]$. 集 F_1 和 Φ_1 均是闭的、非空, 且它们不相交. 其和便是整个线段 $[a, b]$. 但是, 如同我们已经知道的那样, 这是不可

---

① 我们指出: 至少有闭区间 $[a, b]$ 的一半具有这个性质. 为此, 设闭区间的中点就属于 F, 我们取闭区间 $[a, b]$ 的至少含有集 Φ 的一点的那一半作为第一次选中的闭区间.

② 因圆具有凸性. (译者注)

能的(参看 221 题)，因而假定 E 可以表为两个不相交的非空的闭集之和是不正确的. 这意味着闭圆 E 是联络集(参看 219 题).

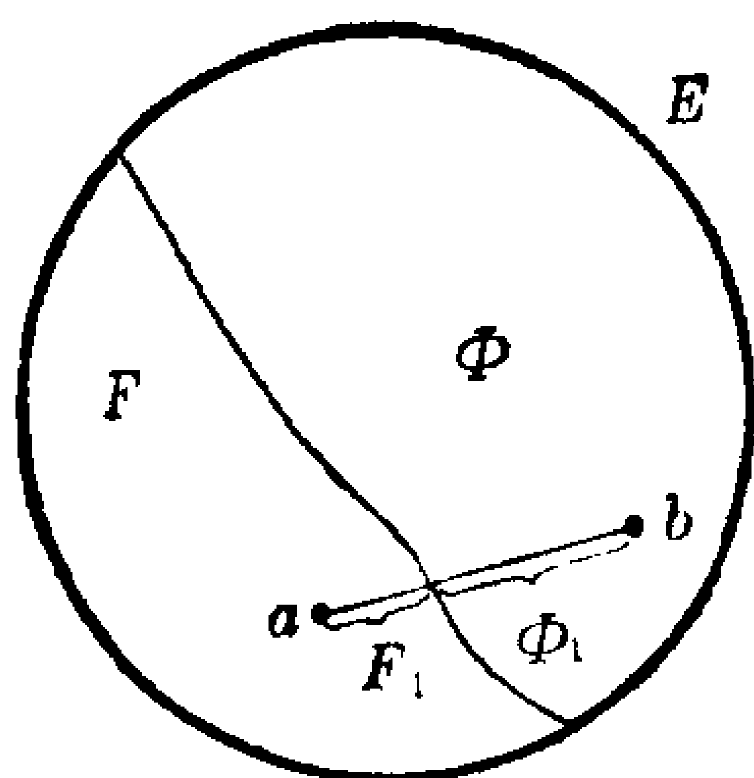


图 26

2) 证明类似.

223. 设E_1和E_2是这样的联络集，使得 $E_1\cap E_2\neq\varnothing$, $E_1\cup E_2=E$. 假如 E 是非联络的，则 E 能表为两个非空集的和 $E=A\cup B$, 且$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\varnothing$. 在集 E_1 和 E_2 中，至少有一个(例如 E_1)，既与 A, 又与 B 有非空的交，那末 $E_1=A_1\cup B_1$, 其中 $A_1=A\cap E_1\neq\varnothing$, $B_1=B\cap E_1\neq\varnothing$; 同时 $(A_1\cap\bar{B}_1)\cup(\bar{A}_1\cap B_1)\subset(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$, 因而$(A_1\cap\bar{B}_1)\cup(\bar{A}_1\cap B_1)=\varnothing$. 这就与集$E_1$的联络性条件相矛盾. 因此假定集 E 非联络就导致矛盾. 即 E 是联络集.

224. 设 E 为直线上的联络集. 取这集的任意两点 $x_1\in E, x_2\in E$, $x_1<x_2$. 我们将要证明在 x_1 与 x_2 之间的任意点 c 属于 E. 如果有这样的点 c $(x_1<c<x_2)$且不属于 E, 则 E 就可表为两个不相交的集 A 与 B 的和，其中 $A=(c,+\infty)\cap E$, $B=(-\infty, c)\cap E$. 显然有$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\varnothing$, 因而 E 就是非联络集. 这与条件矛盾. 所以，如果 E 是联络的，则在 x_1 和 x_2 之间的任何一点也属于 E.

现在证明其逆命题. 假设对于任意的两点 $x_1\in E, x_2\in E$(其中 $x_1<x_2$)，闭区间$[x_1, x_2]$完全含于 E 中. 这时，若 E 是非联络的，则可找出这样的两个非空集 A 和 B, 使 $A\cup B=E$, $A\cap B=\varnothing$, 且

$$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\varnothing. \tag{1}$$

取出点 $x_1\in A$ 和 $x_2\in B$, 研究闭区间$[x_1, x_2]$. 集 $A_1=[x_1, x_2]\cap A$ 和 $B_1=[x_1, x_2]\cap B$ 均非空，且不相交，其和为闭区间$[x_1, x_2]$并且有$(A_1\cap\bar{B}_1)\cup(\bar{A}_1\cap B_1)=\varnothing$(此式由(1)式和 $A_1\subset A$, $B_1\subset B$ 得出). 这是不可能的，因为闭区间$[x_1, x_2]$是联络的. 因而，假定 E 是非联络集，就得出矛盾. 所以 E 是联络集.

225. 由上题结果可知，所给出的集均为联络集.

现在证明其逆命题：直线上的一切联络集就是这些集.

设 E 是直线上的非空联络集，$a=\inf E$, $b=\sup E$. 先考虑 a 和 b 均为有限数的情形$(a<b)$. 那末在 a 与 b 间的任意点 c 含于 E. 事实上，因为 $b=\sup E$, 则有含于 E 中的点b_1, 使 $c<b_1<b$. 完全类似地有 $a_1\in E$, 且 $a<a_1<c$.

那末，由于 E 的联络性以及上题的解得出 $[a_1, b_1] \subset E$，即有 $c \in E$. 因而开区间 (a, b) 含于 E，而在闭区间 $[a, b]$ 之外的点不属于 E. 这样，E 就是下列集之一：

$$(a, b),\ (a, b],\ [a, b),\ [a, b].$$

如果 $a=b$，则 $E=\{a\}$.

如果 $a=-\infty$，而 b 有限，则 E 为 $(-\infty, b)$ 或 $(-\infty, b]$；如果 a 有限，而 $b=+\infty$，则 E 为 $(a, +\infty)$ 或 $[a, +\infty)$；最后，如果 $a=-\infty$，$b=+\infty$，则 $E=(-\infty, +\infty)$. 在这些情况下，证明如同 a, b 为有限时那样进行.

226. 像解 222 题那样进行证明.

227. 假如集 E 是非联络的，则它可表为这样的非空、且不相交的两集 A 与 B 的和，使 A 不含 B 的接触点，而 B 也不含 A 的接触点. 设 $M_1 \in A$, $M_2 \in B$，考察包含点 M_1 和 M_2 的联络集 $Q \subset E$（根据题目的条件，这样的集是存在的）. 集 $Q \cap A$ 与 $Q \cap B$ 均非空，其和为 Q，且一集不含另一集的接触点. 由集 Q 的联络性，便知这是不可能的. 因而，假设 E 是非联络集，就得出矛盾. 这意味着 E 是联络的.

228. 只要注意到：开圆的任意两点可用属于此圆线段联结起来（而线段是联络集），并利用上题结果，便可推出.

229. 假定开圆 E 表成了两个非空、不相交的开集之和

$$E=G_1 \cup G_2,\quad G_1 \cap G_2=\varnothing.$$

作与 E 同圆心的闭圆 $M \subset E$，且它既与 G_1，又与 G_2 有非空的交. 用 F_1 表 $M \cap G_1$. F_1 为两个闭集的交：$F_1=M \cap CG_2$，故它为闭集.

用 F_2 表 $M \cap G_2$，F_2 也是闭的（因 $F_2=M \cap CG_1$），那末闭圆 M 就表成了两个非空、不相交的闭集 F_1 和 F_2 的和：

$$M=F_1 \cup F_2,\quad F_1 \cap F_2=\varnothing,$$

这是不可能的（参看 227 题）. 因而我们开始假定"开圆可以表成两个非空、不相交的开集之和"是不正确的.

230. 假定平面上有这样的集 E，则它的余集 CE 也是非空的集，并且它既是开的，又是闭的（因为它是开集 E 的余集）. 于是全平面就表成了两个非空、不相交的闭集之和 $E \cup CE$. 它与平面的联络性矛盾（参看 227 题）.

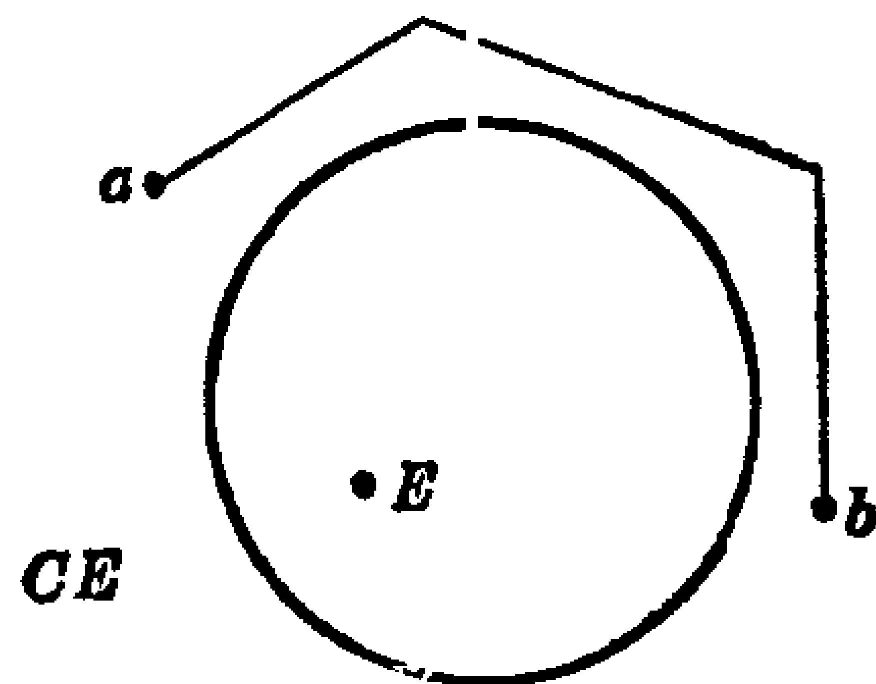


图 27

231. 参看上题之解.

232. 不能. 假设开圆 E 能表成 $E=G_1\cap G_2$, 此处 G_1 和 G_2 是异于全平面, 且其和组成全平面的开集, 则有(由对偶原理):

$$CE=CG_1\cup CG_2,\ \ CG_1\cap CG_2=\varnothing.$$

但是, 这就表示闭集 CE 表成了两个非空、不相交的闭集 CG_1 与 CG_2 之和, 即集 CE 是非联络的①.

事实上, 集 CE 是联络集. 这由下述事实推出: 集 CE 的任意两点 a 和 b 可用属于 CE 的折线联结(图 27), 而折线是联络集(由线段的联络性和 223 题的结果推出折线的联络性). 因而与开始假设所得到的结论相矛盾, 这意味着开始的假设是不正确的.

233. 例: 双曲线及其渐近线.

234. 例: 曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 和直线 $y=-1$.

235. 求出使 $\frac{1}{2^{k_0}}<\varepsilon$ 的 k_0, 则点 0 及点 $\frac{1}{2^{k_0}}$, $\frac{1}{2^{k_0+1}}$, $\frac{1}{2^{k_0+2}}$, …被属于已给的开区间组中的开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 所覆盖; 其余的点被开区间 $\left(\frac{1-\varepsilon}{2^k}, \frac{1+\varepsilon}{2^k}\right)$ $(k=0, 1, \cdots, k_0-1)$ 所覆盖. 所有这些区间 (加上开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$) 就是闭集 E 的有限覆盖(图 28).

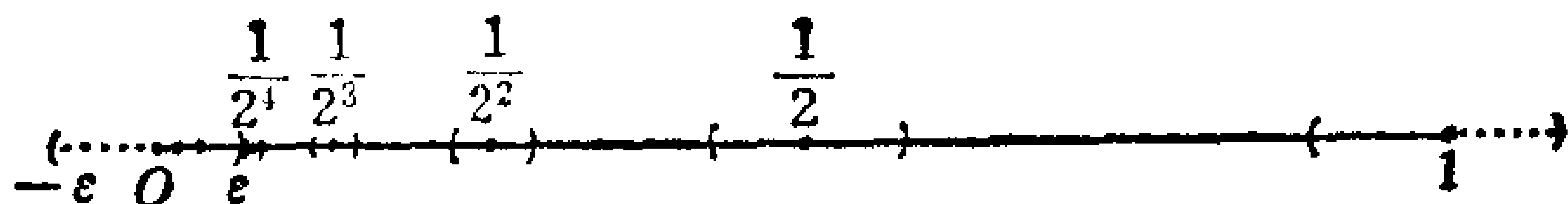


图 28

236. 这里集 E 的每一点只被已给开区间组中的一个开区间覆盖. 因此, 从已知组中分出来的任何有限组只能盖住集 E 的有限点(因而, 不是此集的覆盖).

集 E 非闭. 所以, 在这里并不与海因-波雷耳定理相冲突.

237. 从给出的无限开区间组中也不能分出集 E 的有限覆盖.

集 E 纵然是闭的, 但无界. 因此, 在此情况下, 海因-波雷耳定理也不能运用.

238. 假定由给定的覆盖中可以分出圆 E 的有限覆盖, 并设这些是圆

① CG_1 与 CG_2 作为开集的余集, 是闭的. 因 G_1 与 G_2 异于 R, 它们又是非空的.

$C_1, C_2, \cdots, C_n$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \supset E$, 且有 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} C_i} \supset \bar{E}$. 但在有限个集的情况下,

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} C_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{C}_i$(参看 147 题), 因而 $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{C}_i \supset \bar{E}$, 这是不可能的: 因为每一

闭圆 $\bar{C}_i$ 只含有圆 $\bar{E}$ 的周线上之一点, 这就表示 $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{C}_i$ 不能覆盖圆 $\bar{E}$.

我们作的假定导致了矛盾, 这意味着从给出的集 E 的覆盖中不能分出有限覆盖.

239. 能. 为此, 只需从覆盖中分出那样一些圆便可以了. 这些圆的圆心在圆周 L 的有理点上, 这里 L 是圆心在 O, 半径为$\frac{1}{3}$的圆周(此时, 如果半径向量与某固定半径组成角 $\alpha\pi$, 其中 α 是任何的有理数时, 我们便称圆周 L 上的这点为有理点).

为了证明圆 E 的每一点被圆的这个可数组覆盖, 考察任意的点 $P \in E$ (图 29), 设它到 O 的距离是 $d(d<1)$, 且射线 OP 与 L 相交于 P_0 点(同时, $PP_0 = d - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$). 如果 P_0 是有理点, 则圆心在 P_0 点的圆包含点 P. 如果 P_0 是无理点, 利用有理点的稠密性, 容易找出 P_0 附近的这样一有理点 P_1, 使 $P_0P_1 < 1-d$(图 29). 那末, 圆心在 P_1 的圆包含点 P, 因为

$$\rho(P, P_1) \leqslant \rho(P, P_0) + \rho(P_0, P_1) < \left(d - \frac{1}{3}\right) + (1-d) = \frac{2}{3}.$$

于是, 圆 E 的每一点 P 含于所选出的半径为$\frac{2}{3}$的圆的可数组中的某个圆内.

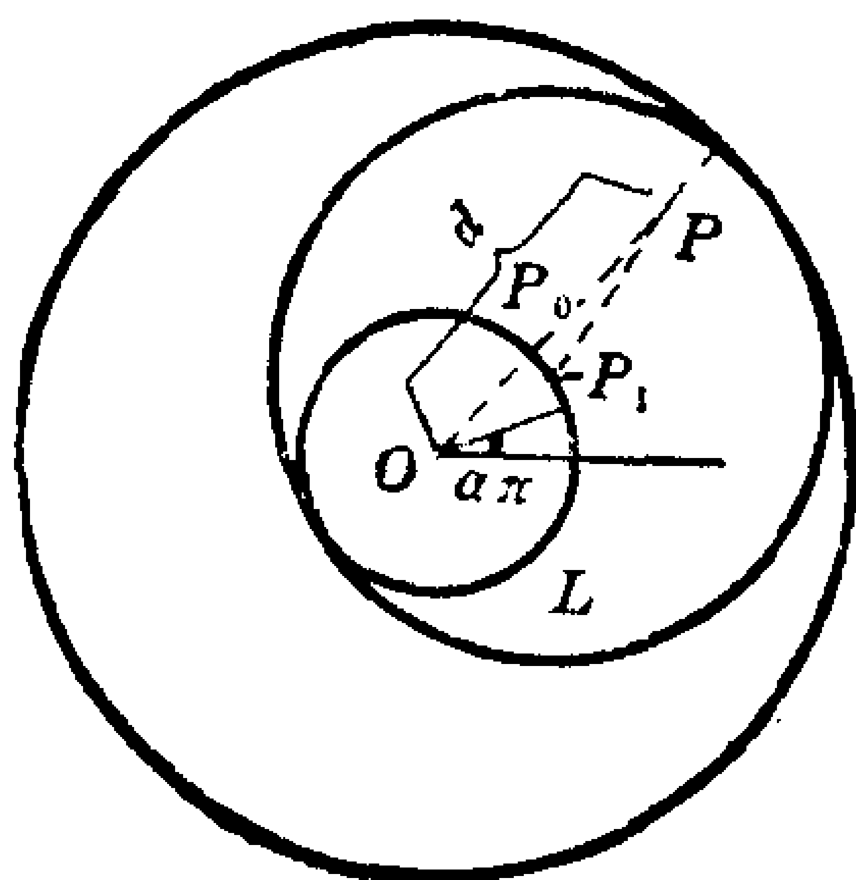


图 29

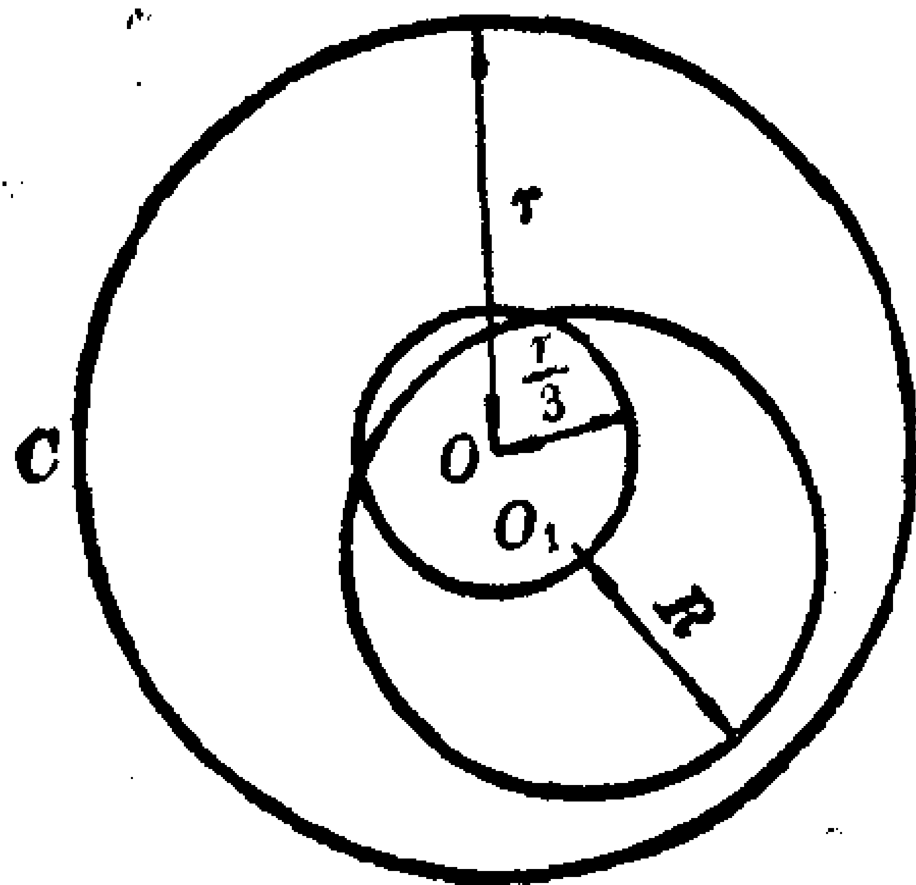


图 30

241. 我们把平面上圆心的坐标和半径都是有理数的圆叫做有理圆. 一切有理圆所成的集是可数的(参看第三章 64 题). 我们证明圆心在 O 点、半径为 r 的任意圆 C 包含一个含有点 O 的有理圆. 为此, 画一个半径为 $\frac{r}{3}$ 的 C 的同心圆(图 30), 且在此圆内取一有理点 O_1(即坐标为有理数). 现在, 以点 O_1 为心, R 为半径画圆 (这里 R 是合条件 $\frac{r}{3}<R<\frac{2r}{3}$ 的任意的有理数), 则此圆便为所求: 因为它含有点 O (由于 $\rho(O, O_1)<\frac{r}{3}<R$), 且含于 C 中. (因与点 O_1 的距离小于 R 的任一点 P 都在圆 C 内. 事实上:

$$\rho(P,O)\leqslant\rho(P,O_1)+\rho(O_1,O)<R+\frac{r}{3}<\frac{2r}{3}+\frac{r}{3}=r.$$

现在容易证明一切开有理圆的序列

$$G_1, G_2, G_3, \cdots, G_n, \cdots \tag{1}$$

具有以下性质: 任何开集 Γ 就是此序列中某些圆的和.

在每一点 $x\in\Gamma$ 画一开圆 $V(x)\subset\Gamma$ (因 x 为集 Γ 的内点, 这总是可能的). 其次, 求出一个含于 $V(x)$ 中, 且包含点 x 的有理圆 G. 用这种方法选出的一切有理圆之和便组成集 Γ. 事实上, 集 Γ 的每一点含于选出的某有理圆内, 因而 $\Gamma\subset\bigcup G$; 另方面, 这里作的有理圆包含在 Γ 中, 因此又有 $\bigcup G\subset\Gamma$.

于是, 最后有 $\Gamma=\bigcup G$. 这样一来, 从序列(1)中能分出某些圆的全体, 其和是 Γ.

242. 设 E 被某开集组 $\{\Gamma\}$ 覆盖. 对于每一点 $x\in E$ 画一有理圆, 它包含点 x, 且含于已给出的组中的某个开集 Γ 中, 此集覆盖点 x (参看上题的解). 我们把一切选出的有理圆记为 $G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots$, 并使这些圆的每一个对应于组 $\{\Gamma\}$ 中的、包含这个圆的那个开集(包含圆 G_n 的开集记为 Γ_n), 则可数组 $\{\Gamma_n\}$ 覆盖了集 E. 事实上, $\bigcup\limits_n G_n\supset E$ (因每一点 $x\in E$ 包含在某圆 G_n 中); 另方面, $\Gamma_n\supset G_n$, 因而

$$\bigcup_n \Gamma_n\supset\bigcup_n G_n\supset E.$$

243. 例: 开集 $(0, 1)$ 被下面的开区间组

$$\left(\frac{1}{3},1\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{7},\ \frac{1}{5}\right),\cdots,$$
$$\left(\frac{1}{n+2},\ \frac{1}{n}\right),\cdots$$

所覆盖. 由此覆盖中不能删去任何一个开区间. 如果,那怕删去一个, 在这组中所余下的就不能盖住整个集(0, 1). 因此, 更不能从给出的开区间组中分出有限覆盖.

另一个例: 开区间$\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$是开集(0, 1)的无限覆盖, 也不能从这个无限覆盖中分出有限覆盖.

244. 不正确. 例如, 闭集[0, 1]为闭区间组:

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \cdots, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \cdots \text{和} [-1, 0]$$

所覆盖. 由此组中不能分出有限覆盖(不仅如此, 还不能从这组中去掉任何一个闭区间).

245. 这个定理是正确的. 像证明关于用邻域覆盖有界闭集的定理 (海因-波雷耳定理)那样进行证明.

但是, 可以不再证明这个定理, 而把它看作海因-波雷耳定理的推论. 为此, 对给出的闭集E的每点x作邻域$V(x)$, 使$V(x)$完全含于覆盖的相应集中[①]. 其次, 从所有的$V(x)$中选出有限覆盖$V(x_1), V(x_2), \cdots, V(x_n)$(由海因-波雷耳定理, 这是可能的). 然后从给出的覆盖中找那样的开集, 它包含选出的邻域: $G_1 \supset V(x_1), \cdots, G_n \supset V(x_n)$. 这些开集$G_1, \cdots, G_n$就构成了$E$的有限覆盖.

246. 设E是致密的. 将要证明E是有界集. 在这个集的每一点作半径等于1的邻域, 并从这个覆盖中分出有限个, 设它们是下列邻域:

$$V(x_1), V(x_2), \cdots, V(x_n). \tag{1}$$

由这些邻域的中心到某固定点O(例如坐标原点) 的最大距离用A表示. 我们证明: 任意点$x \in E$到O的距离小于$A+1$. 事实上, 因为集E被邻域组(1)覆盖, 那末, 从中可找出包含点x的邻域(例如$V(x_i)$). 则

$$\rho(x, O) \leqslant \rho(x, x_i) + \rho(x_i, O) < 1 + A$$

因此, 不等式$\rho(x, O) < 1+A$对任意的$x \in E$都成立. 这就表示E是有界集.

下再证明E是闭集. 为此, 只要证明它的余集CE是开集就行了. 设$\zeta \in CE$. 在每点$x \in E$作半径为$\frac{1}{2}\rho(x, \zeta)$的邻域, 这些邻域覆盖了$E$. 再从这个覆盖中分出有限覆盖. 用$b$表示分出的诸邻域的中心到点$\zeta$的距离的最

---

① 即覆盖中含点x的一集. (译者注)

短者. 那末,集E的全部点到ζ的距离都大于$\frac{b}{2}$. 这意味着,在点ζ的$\frac{b}{2}$-邻域内没有E的点,即ζ是集CE的内点. 因为ζ是CE的任意点,则这个集的所有点都是内点. 因而CE是开的,那末E就是闭的.

247. 例: 由函数$\{f_i(x)=\sin 2^i x\}$形成的可数集E在C中有界(参看211题). 此外,E是闭的. 事实上,对任意两元$f_i \in E$和$f_j \in E$都有$\rho(f_i, f_j) \geqslant 1$(当$i \neq j$时);因而集$E$没有极限点,这表示$E$是闭集.

同时,E不是致密的,因为就在$\varepsilon=0.1$时,从集E的元的ε-邻域族中不能分出有限覆盖(因为这些邻域的每一个只含E中的一元).

248. 设I是直线上任意的开区间. I向左移动a得到的开区间I_0含有不包含集E的点的子开区间M_0(因为,根据条件E是无处稠密的),此时,由M_0向右移a而得到的开区间M包含于I,且不含A的任何一点.

因而,A在直线上无处稠密.

249. 若集E在直线上处处稠密,则任意的开区间(α, β)含有E中无穷多个点,事实上,如果在开区间(α, β)上只有E中的有限个点,则在(α, β)上就能找出完全不含集E的点的开区间.

现在如果从E中除去有限子集A,那末,在任意的开区间(α, β)上仍有$E \backslash A$的无穷多点,即集$E \backslash A$在直线上处处稠密.

250. 存在. 例: 设A是由全部无理负数和全部有理正数组成的集,B是A对全直线的余集. 两个集均非可数,且在直线上处处稠密,而它们的交是空集.

此例也可以改变为: 使集A和B在任何开区间(α, β)是不可数的. 为此,可以利用在解297题时所引出的那种构造法.

251. 在解189题时,作出了可数集序列$E_1, E_2, \cdots$,其中每一个在直线上处处稠密,且它们两两互不相交. 用I表示这些集的和的余集(它在任何的开区间内不可数),研究下面的集的序列:

$$A_1=E_1 \cup [I \cap (0,1)],\ A_2=E_2 \cup [I \cap (1,2)],\ \cdots,$$

$$A_k=E_k \cup [I \cap (k-1,k)],\ \cdots$$

显然,其中的集两两不相交、且每一个在直线上处处稠密. 同时所有的集A_k是不可数的,因而集$\{A_k\}$的总体便为所求.

252. 如果F是有限集,就可以取集F作为E.

如果F是无限闭集. 取下面两个集E_1和E_2的和作为E. E_1是邻接区

间的全部端点集；E_2 是属于集 F 内部的全部有理点而成的集（当然，E_2 也可能是空的．当集 F 无处稠密时，就是这样）．容易看出集 F 的每一点 x_0 是 E 的接触点：如果 x_0 是 F 的内点，则在任意的邻域 $V(x_0)$ 有 E_2 的点；如果 x_0 是 F 的边界点，则在任何邻域 $V(x_0)$ 有 E_1 的点．另一方面，在集 F 之外没有集 E 的接触点（因 F 是闭的，且 $E\subset F$）．

因而 $\bar{E}=F$，其中 E 是可数集，且 $E=E_1\cup E_2$．

253. 例：自然数列（更一般是任一单调无界序列）．

254. 中心在坐标原点的任一线段内，只有有限个已知序列的项（如果有无穷多，则根据波尔察诺-维尔斯特拉斯定理从中可以分出收敛子序列）．因而，对于任何的 $M>0$，存在 $N>0$，使当所有的 $n>N$ 时，$|a_n|>M$ 成立，这就表示 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$．

255. 由全部有理数组成的且按任意的方式编号的序列都可以作为例子．

256. 设 F 是已知序列 $\{a_n\}$ 的极限集，而 ζ 是集 F 的极限点，我们将证明 $\zeta\in F$．

因为 ζ 是 F 的极限点，则 F 中存在收敛于 ζ 的点列 $\{x_k\}$．我们可以找出点 a_{n_1}，它属于已知的序列 $\{a_n\}$，且与 x_1 的距离小于 1．这样的点之所以能够找到，因为 x_1 是序列 $\{a_n\}$ 的极限点．

再找 a_{n_2}，它也属于已知的序列 $\{a_n\}$、且与 x_2 的距离小于 $\frac{1}{2}$，而且要求号码 n_2 大于 n_1．

如果找出了点 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_{k-1}}$，就取已知序列的那项当作 a_{n_k}，它与 x_k 的距离小于 $\frac{1}{k}$，同时使号码 $n_k>n_{k-1}$．

我们证明所作的序列 $\{a_n\}$ 的子序列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$ 收敛于 ζ．事实上

$$\rho(a_{n_k},\zeta)\leqslant\rho(a_{n_k},x_k)+\rho(x_k,\zeta)<\frac{1}{k}+\rho(x_k,\zeta),$$

由此推出当 $k\to\infty$ 时，$\rho(a_{n_k},\zeta)\to 0$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\zeta$．这表示 ζ 属于集 F．

因而，集 F 的任意极限点 ζ 属于此集，所以，它是闭集．

257. 为了证明此题，我们先作可数集 E，使其闭包是 F（在 252 题中已证明了作出这种集的可能性）．

如果 E 无孤立点，则用任意的方法把集 E 的点编上号码后，就得到所求

的序列.

如果在集E的点中有孤立点，我们用下面的方法来办理．即先列出表

$$
\begin{array}{l}
b_1 b_2 b_3 \cdots b_k \cdots \\
c_1 c_1 c_1 \cdots c_1 \cdots \\
c_2 c_2 c_2 \cdots c_2 \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_n c_n c_n \cdots c_n \cdots
\end{array}
$$

其中 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k, \cdots$ 是集E的全部非孤立点，而 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ 是集E的孤立点．现在用任一方法把此表写成序列，例如

$$b_1, c_1, b_2, c_1, c_2, b_3, c_1, c_2, c_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, b_5, c_1, \cdots.$$

这个序列即为所求.

258. 级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$的所有的部分和之集就与闭区间$[0, 1]$相同.

259. 级数$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}+\cdots$的一切部分和的集就与康托完备集相同.

260. 先证明正项收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的一切部分和所成的集$E$是闭的.

自然数的每一集相应于级数的一个确定的部分和．而用下面的方法可以在自然数集与康托集D的点之间建立一一对应：使自然数集$\{n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots\}$对应属于集$D$的点$x=\frac{2}{3^{n_1}}+\frac{2}{3^{n_2}}+\cdots+\frac{2}{3^{n_k}}+\cdots$，且把自然数集中的空集对应于点$x=0$，而一切自然数集对应于点$x=1$．容易看出：在以自然数为元所成一切集之簇与康托完备集之间建立的对应是一一的.

这时可说成：每点$x\in D$相应于级数的某个部分和．用y表示相应于点$x\in D$的部分和，我们就得到一个函数关系$y=f(x)$．我们将证明它在集D的所有点处是连续的.

设$x_0\in D, y_0=f(x_0)$．取一任意的$\varepsilon>0$，存在这样的N，只要$n>N$时，级数的余项$\sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i$小于$\varepsilon$．研究点$x_0$的邻域:

$$\left(x_0-\sum_{i=N}^{\infty}\frac{2}{3^i},\ x_0+\sum_{i=N}^{\infty}\frac{2}{3^i}\right).$$

我们要证明对于这个邻域中的所有点$x\in D$，都满足不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。事实上，任意点$x\in D$的三进位展式与点$x_0$的三进位展式只在这些项上不同，即它的足码超过$N$的项．这时，相应于点$x$的自然数集与相应于点$x_0$的自然数集间，只有超过$N$的数才不相同．因而，相应于点$x$的部分和同相应于点$x_0$的部分和只有其足码超过$N$的那些项不同．而足码超过$N$的那些项的和小于$\varepsilon$．于是，对于前面已求出的点$x_0$之邻域中的一切点$x\in D$，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，由于$\varepsilon>0$的任意性，由此推出函数$y=f(x)$在任一点$x_0\in D$是连续的(关于$D$)．

于是，把有界闭集D映成级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$的一切部分和的集$E$的函数$y=f(x)$是连续的．但在此时，集$D$的象(即集$E$)也是有界闭集(参看376题)．

现在证明E无孤立点．设$y_0\in E$，$y_0=\sum\limits_{i\in\Pi}a_i$，(其中$\Pi$是某一自然数的集合)．设$\varepsilon>0$．那末，在点$y_0$的$\varepsilon$-邻域内，至少有$E$中不同于$y_0$的一点．事实上，如果级数$\sum\limits_{i\in\Pi}a_i$含无穷多项，由于$a_n\to0$(当$n\to\infty$)，因此，在这个级数的项中一定可找出小于$\varepsilon$的项(例如$a_{n_0}$)．那末，部分和$\sum\limits_{i\in\Pi\setminus\{n_0\}}a_i$与$y_0=\sum\limits_{i\in\Pi}a_i$的差小于$\varepsilon$，并且不等于$y_0$(因为$a_{n_0}\neq0$)．如果级数$y_0=\sum\limits_{i\in\Pi}a_i$只含有限项，则从原级数中一定可找出一项(例如$a_{m_0}$)，它不含于这个和中，且小于$\varepsilon$．则部分和$\sum\limits_{i\in\Pi\cup\{m_0\}}a_i$与$y_0$之差小于$\varepsilon$，并且不等于$y_0$．

总之，在任一点$y_0\in E$的任何ε-邻域中有E的且不同于y_0的点，因此，E不含孤立点．因为E是闭集，又无孤立点，则它便是完备集．

261. 像在260题的解中前面部分那样进行证明．此时，要这样取N，使当$n>N$时，不等式$\sum\limits_{i=n}^{\infty}|a_i|<\varepsilon$成立．

262. 像在260题的解中后面部分那样进行证明．

263. 如果$y=\sum\limits_{i\in\Pi}a_i$是级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$的部分和，则$z=\sum\limits_{i\in C\Pi}a_i$也是该级数的部分和(这里，$C\Pi$是$\Pi$对全体自然数集的余集)．但$y+z=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=s$．从

而，由 $y\in E$ 得出 $s-y\in E$，这就表示 E 是以点 $\frac{s}{2}$ 为对称中心的对称集.

264. 如果绝对收敛级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 的项中只有有限项不为零，则此级数部分和的集只由孤立点组成. 如果绝对收敛级数的项中，有无穷多项不等于零，则此级数部分和集根本没有孤立点(参看 262 题)，因此，它是完备集.

265. 必要性. 假定有这样的数 N，使 $a_N > \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i$. 我们将证明在这种情况下，部分和所成的集不能填满闭区间 $[0, s]$. 任取一个符合条件 $\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i < \zeta < a_N$ 的数 ζ. 此数不能表成级数部分和的形式. 事实上，如果 $\zeta = \sum_{i\in\Pi} a_i$，则 Π 不含数 $1, 2, \cdots, N$ 中的任何一个，因为当 $i \leqslant N$ 时，所有的 a_i 大于 ζ，但 Π 又是集 $\{N+1, N+2, \cdots\}$ 的子集，而这也是不可能的(因为，如果 $\Pi \subset \{N+1, N+2, \cdots\}$，则 $\sum_{i\in\Pi} a_i \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i < \zeta$).

因而，只要有一个号码 n 使不等式 $a_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ 成立，则全体部分和的集不能填满整个闭区间 $[0, s]$.

充分性. 设对任意的 n 不等式 $a_n \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ 成立，又设 ζ 是符合条件 $0 < \zeta < s$ 的任一数. 我们将找出这样的自然数所成之集 Π，使 $\sum_{i\in\Pi} a_i = \zeta$. 为此，先求出这样的 n_1，使

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1} < \zeta, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1} + a_{n_1+1} \geqslant \zeta.$$

其次，在级数 $a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + a_{n_1+3} + \cdots$ 的项中依次求出第一个这样的项，把它加到和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}$ 中后，我们得到比 ζ 小的数，设此项为 a_{m_1}. 因为 $a_n \to 0$，所以这样的项一定能找到. 此后，再补充项 $a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, a_{m_1+3}, \cdots$ 一直到不再有

$$a_1 + \cdots + a_{n_1} + a_{m_1} + a_{m_1+1} + \cdots + a_{n_2} < \zeta,$$

$$a_1 + \cdots + a_{n_1} + a_{m_1} + a_{m_1+1} + \cdots + a_{n_2} + a_{n_2+1} \geqslant \zeta$$

时为止. 由 $a_{m_1-1}\leqslant\sum\limits_{i=m_1}^{\infty}a_i$ 推出这样的 n_2 是找得到的.

继续这一过程以至无穷, 得出下列的部分和:

$$a_1+\cdots+a_{n_1}+a_{m_1}+a_{m_1+1}+\cdots+a_{n_2}+a_{m_2}+a_{m_2+1}+\cdots+a_{n_3}+a_{m_3}+\cdots,$$

容易验证这个级数的和等于 ξ. 为此, 只需利用数列 a_{n_1+1}, a_{n_2+1}, a_{n_3+1}, $\cdots$ 收敛于零这一事实就行了.

这样一来, 就证明了部分和的集填满了整个闭区间.

266. 如像证明 265 题的充分性那样来进行证明.

267. 如果级数的通项不趋于零, 就有可能. 例如, 级数 $1+1+\cdots+1+\cdots$ 的一切部分和所成之集重合于一切非负整数所成之集.

268. 因为 G 在直线上处处稠密, 则开区间 I 含有点 $x_0\in G$. 但 x_0 是集 G 的内点, 因此这点的某邻域 I_0 也含在 G 中. 这个邻域可以把半径取得这样的小, 使得该邻域及其闭包含于 I 中, 因此 $\bar{I}_0\subset I\cap G$.

269. 设 $G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots$ 是在直线上处处稠密的开集序列. 我们证明其交也是处处稠密的.

设 I 是任意的开区间, 根据 268 题的结论, 可找出这样的开区间 I_1, 使 $\bar{I}_1\subset I\cap G_1$. 又由于同样的结论, 找出 I_2, 使 $\bar{I}_2\subset I_1\cap G_2$. 其次, 再找出 I_3, 使 $\bar{I}_3\subset I_2\cap G_3$, 等等. 结果得出一个含于另一个的闭区间套序列:

$$\bar{I}_1\supset\bar{I}_2\supset\bar{I}_3\supset\cdots\supset\bar{I}_n\supset\cdots,$$

而且, 它们全部含于最初已选出的开区间 I 中. 因此, 这些闭区间的公共点 ξ 也含于 I 中; 另一方面, ξ 又含于每一个集 G_k 中(因 $\xi\in I_{k-1}\cap G_k$).

这样一来, 在任意的开区间 I 中有点 $\xi\in\bigcap G_k$, 这就表示 $\bigcap G_k$ 在直线上处处稠密.

270. 像证明"在欧氏空间中每一个完备集其势为 c"那样来作出这个命题的证明.

设 $G_1\supset G_2\supset G_3\supset\cdots\supset G_k\supset\cdots$ 是在 $[a, b]$ 上处处稠密开集列, 令 $E=\bigcap\limits_k G_k$. 在 $[a, b]$ 上任取两个不相交的开区间 I_0 和 I_1, 且分别在每个开区间中选择开区间 δ_0 和 δ_1, 使 $\bar{\delta}_0\subset I_0\cap G_1$, $\bar{\delta}_1\subset I_1\cap G_1$(参看 268 题, 这样的开区间 δ_0 与 δ_1 一定存在).

我们把开区间 δ_0 和 δ_1 称为第一秩开区间.

现在我们研究含于δ_0中、任意两个长度相同的、且不相交的开区间I_{00}和I_{01}；以及含于δ_1中、两个长度相同不相交的开区间I_{10}和I_{11}. 再在它们的每一个中找出开区间$\delta_{00},\delta_{01},\delta_{10},\delta_{11}$，使下列包含式成立:

$$\bar{\delta}_{00}\subset I_{00}\cap G_2,\ \bar{\delta}_{01}\subset I_{01}\cap G_2,\ \bar{\delta}_{10}\subset I_{10}\cap G_2,\ \bar{\delta}_{11}\subset I_{11}\cap G_2.$$

我们把开区间$\delta_{00},\delta_{01},\ \delta_{10},\delta_{11}$叫做第二秩开区间.

一般地，如果作出了第k秩开区间，为了作出$k+1$秩开区间，用下面的办法进行：设$\delta_{i_1i_2\cdots i_k}$(其中数$i_1,\ i_2,\cdots i_k$是0或1)是任何一个$k$秩开区间. 在此区间中，我们分出两个长度相等、互不相交的开区间$I_{i_1i_2\cdots i_k0}$和$I_{i_1i_2\cdots i_k1}$. 且分别在每一个中找出这样的开区间$\delta_{i_1i_2\cdots i_k0}$和$\delta_{i_1i_2\cdots i_k1}$，使

$$\bar{\delta}_{i_1i_2\cdots i_k0}\subset I_{i_1i_2\cdots i_k0}\cap G_{k+1},\ \bar{\delta}_{i_1i_2\cdots i_k1}\subset I_{i_1i_2\cdots i_k1}\cap G_{k+1}.$$

用这种方法得到的全部开区间$\delta_{i_1i_2\cdots i_ki_{k+1}}$叫做第$k+1$秩开区间. 它们的数目比第$k$秩开区间多一倍.

下列诸性质是显而易见的：a) 在固定k时，第k秩的不同的开区间及其闭包是互不相交的；б) 随着k的增加，开区间的长度趋于0；в) 对于任意的0和1的序列$i_1,\ i_2,\ i_3,\cdots$，有$\bar{\delta}_{i_1}\supset\bar{\delta}_{i_1i_2}\supset\bar{\delta}_{i_1i_2i_3}\supset\cdots$.

由性质б)和в)推出：对任一0和1的序列$i_1,i_2,i_3,\cdots$，存在唯一的一点$x_{i_1i_2i_3}\cdots$，它是闭区间的交$\bar{\delta}_{i_1}\cap\bar{\delta}_{i_1i_2}\cap\bar{\delta}_{i_1i_2i_3}\cap\cdots$；同时，又由性质a)得出两个不同的序列$i_1,i_2,i_3,\cdots$，和$i'_1,i'_2,i'_3,\cdots$相应于两个不同的点$x_{i_1i_2i_3}\cdots$和$x_{i'_1i'_2i'_3}\cdots$因此，$x_{i'_1i'_2i'_3}\cdots$全体这些点$x_{i_1i_2i_3\cdots}$的集和全体由0和1组成的序列所成的集，具有相同的势. 即有连续统的势.

用A表示一切点$x_{i_1i_2i_3\cdots}$的集，我们将证明$A\subset E$. 为此，取任意的点$x_{i_1i_2i_3\cdots}\in A$，且证明它包含于E中. 因

$$x_{i_1i_2i_3\cdots}=\bar{\delta}_{i_1}\cap\bar{\delta}_{i_1i_2}\cap\bar{\delta}_{i_1i_2i_3}\cap\cdots,$$

又因为根据作法，有

$$\bar{\delta}_{i_1}\subset G_1,\ \bar{\delta}_{i_1i_2}\subset G_2,\ \bar{\delta}_{i_1i_2i_3}\subset G_3,\ \cdots,$$

则对于任意的k，有$x_{i_1i_2i_3\cdots}\in G_k$，这意味着$x_{i_1i_2i_3\cdots}\in\bigcap\limits_k G_k$，即$x_{i_1i_2i_3\cdots}\in E$. 因而，集$A$的任一点是集$E$的元，即$A\subset E$. 但前面已证明了$A$具有连续统的势，即是说，集$E$也有连续统的势.

注：由证明过程看出：当集$G_1,G_2,G_3,\cdots$是平面上(在某个闭圆内稠密)或是三维空间中的开集(在某球内稠密)，结果仍然成立.

271. 设$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k,\cdots$是直线上的无处稠密集. 此时，这些集的

闭包 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \cdots, \bar{A}_k, \cdots$ 也无处稠密(参看 203 题). 因而, 集 $\bar{A}_k$ 的余集是直线上处处稠密的开集, 于是, 它们的交集 $\bigcap_k C\bar{A}_k$ 也是在直线上处处稠密的(参看 269 题). 这意味着, 无论如何它是非空的.

现在容易验证所有 A_k 之和的余集非空. 事实上:

$$C(\bigcup_k A_k) \supset C(\bigcup_k \bar{A}_k) = \bigcap_k C\bar{A}_k \neq \varnothing$$

(这里, 因 $\bigcup_k A_k \subset \bigcup_k \bar{A}_k$, 故得 $C(\bigcup_k A_k) \supset C(\bigcup_k \bar{A}_i)$. 再运用对偶原理便可). 因此

$$C(\bigcup_k A_k) \neq \varnothing,$$

由此推出集 $\bigcup_k A_k$ 不同于全直线(不但如此, 还可在任意的开区间中找出不属于集 $\bigcup_k A_k$ 的点).

272. 设 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_k, \cdots$ 是直线上处处稠密的 G_δ 型集. 于是, 对于任意的 k, $B_k = \bigcap_i G_{k,i}$(其中 $G_{k,i}$ 是开集). 因为对于任意的 i, k, $G_{k,i} \supset B_k$, 则一切的 $G_{k,i}$ 在直线上也是处处稠密的.

用 E 表示一切 B_k 的交, 有

$$E = \bigcap_k B_k = \bigcap_k (\bigcap_i G_{i,k}) = \bigcap_{i,k} G_{i,k}.$$

因而 E 是可数个处处稠密的开集 $\{G_{i,k}\}$ 的交, 则 E 本身也是处处稠密的(参看 269 题). 因此, $E = \bigcap_k B_k$ 在直线上是处处稠密的 G_δ 型集.

273. 例: $E_1 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \cdots\}$, $E_2 = \{r_2, r_3, r_4, \cdots\}$, $E_k = \{r_k, r_{k+1}, r_{k+2}, \cdots\}$, $\cdots$(其中 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ 是用任意的方法编了号的有理数全体). 集 E_1 在直线上是稠密的. 因为其余的集是从集 E_1 中去掉一个有限集而产生的, 因此它们在直线上也是稠密的(参看 249 题).

另一方面, 无论取哪一点 r_k, 它绝不可能包含在所有的 E_k 之中. 于是所有 E_k 的交是空的.

274. 由有理数所成的集 E_1 在直线上是处处稠密的. 假定它是 G_δ 型

的集．那末，由 E_1 平移$\sqrt{2}$而得到的集E_2（即形如$r+\sqrt{2}$的集，其中 $r\in E_1$）也是处处稠密的 G_δ 型集．但是，在此情况下，它们的交也是处处稠密的集（参看 272 题）．而事实上又有 $E_1\cap E_2=\varnothing$．因而，假定 E_1 是 G_δ 型集是不正确的．即表示了直线上一切有理数所成之集 E_1 不是 G_δ 型集．

275. 利用对偶原理进行证明．同时还需利用上题的结果．

276. 类似于在解 274 题时采用的证明．只是在平移时，要选择数 α，使形如 $x+\alpha$（$x\in E$）的点集不与 E 相交，（由于 E 是可数的，这件事是能办到的）．

277. 提示．利用前题结果．

278. 如果集$[0,1)\cap I$（这里 I 是一切无理数组成的集）为 F_σ 型的．因为，对于任意的整数 k，任何一个形如$[k,k+1)\cap I$ 的集可合于给出的集，于是它也是 F_σ 型的集．但可数个集的和 $\bigcup\{[k,k+1)\cap I\}$（这里按一切整数求和）也为 F_σ 型的集．这是不可能的，因为这个和重合于集 I（参看 275 题）．

对任何的 α 和 β（$\alpha<\beta$），证明 $[\alpha,\beta)\cap I$ 不是 F_σ 型的集，可类似地进行．只是平移的距离不是 1，而是合条件 $0<r\leqslant\beta-\alpha$ 的任一固定的有理数 r．

要证明$[\alpha,\beta)\cap M$（其中 M 为一切有理数所成之集）不是 G_δ 型集，只要注意下面的事实就可以了：$[\alpha,\beta)\cap M$ 是集 $[\alpha,\beta)\cap I$ 的余集（对整个半开区间 $[\alpha,\beta)$），后者不是 F_σ 型集．

279. 取由全部负有理数和全部正无理数所组成的集 E 作为这样的例子．如果说 E 为 G_δ 型的，则它在半开区间 $[-1,0)$ 内的点所成的子集也为 G_δ 型的，这是不正确的（参看前题）．如果 E 为 F_σ 型的，则它在半开区间 $[1,2)$ 中的子集也为 F_σ 型的，这也是不正确的．因此，E 既非 G_δ 型集，又非 F_σ 型集．

280. 可把这题化为直径趋于零的闭集套序列的情形．

为此，考虑包含 A_1 的闭区间$[a,b]$（因而$[a,b]\supset A_k$，$k=1,2,\cdots$），把$[a,b]$分成两个一样长的闭区间．把其中与 A_k 的每一个有非空[①]交的一半称为第一次选出的闭区间 I_1．其次，又平分第一次选出的闭区间 I_1，把其中与每一 A_k 有非空交的一半称为第二次选出的闭区间 I_2．一般地，如果已选出了闭区间 $I_1,\cdots,I_{n-1}$，我们将 I_{n-1} 分为长度相等的两个闭区间，取其中与每一个

① 如果两个闭区间都具有所指出的性质，就把闭区间$[a,b]$内左边的一半称为第一次选出的闭区间 I_1．

A_k 有非空交的那一半为 I_n. 令 $B_k=A_k\cap I_k$, 现在研究序列$\{B_k\}$, 显然有

$$B_1\supset B_2\supset B_3\supset\cdots\supset B_k\supset\cdots$$

且当 $k\to\infty$ 时, $\operatorname{diam}B_k\to 0$(因 $B_k\subset I_k$, 所以 $\operatorname{diam}B_k\leqslant\operatorname{diam}I_k$). 因而, 根据康托定理, 存在点 x_0, 使 x_0 是一切 B_k 的公共点. 但对任意的 k 有 $B_k\subset A_k$, 因此, $x_0\in\bigcap\limits_k B_k\subset\bigcap\limits_k A_k$, 即 $\bigcap\limits_k A_k$ 非空.

281. 例如, 设 $A_1=(0,1)$, $A_2=\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\cdots$, $A_n=\left(0\ \frac{1}{n}\right)$, $\cdots$. 此时, 全部 A_n 非空, 而后面的集含于前面的集中, 而且, $\bigcap\limits_n A_n=\varnothing$.

282. 如果 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$ 且 $\bar{A}_{n+1}\subset A_n$, 则 $\bigcap\limits_n\bar{A}_n=\bigcap\limits_n A_n$. 但 $\bigcap\limits_n\bar{A}_n$ 非空(因为全部 $\bar{A}_n$ 是非空有界闭集, 且 $\bar{A}_1\supset\bar{A}_2\supset\cdots\supset\bar{A}_n\supset\cdots$). 因而 $\bigcap\limits_n A_n$ 也是非空的.

283. 设集 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 均为有界闭集. 我们将证明: 如果所有这些集的交是空集, 则可找出有限个这种集, 而其交也是空的(于是定理就证明了).

设 $\bigcap\limits_k A_k=\varnothing$, 则 $C\left(\bigcap\limits_k A_k\right)=R$, 其中 R 是全直线. 根据对偶原理有 $\bigcup\limits_k CA_n=R$. 诸集 CA_k 均为开集, 其和为全直线. 于是, 它们组成了有界闭集 A_1 的覆盖, 从这个覆盖中选出有限个, 使

$$CA_{i_1}\cup CA_{i_2}\cup\cdots\cup CA_{i_n}\supset A_1$$

(参看245题). 那末, 再一次用对偶原理得:

$$A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_n}\subset CA_1,$$

即有

$$A_1\cap A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_n}=\varnothing.$$

因此, 如果 $\bigcap\limits_k A_{i_k}=\varnothing$, 则从这些集中可找出有限个集 $\{A_1, A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_n}\}$, 而其交是空集. 因而, 如果集族 $\{A_k\}$ 的任意有限个集之交非空, 则所有 A_k 的交也是非空的.

注. 从证明中看出, 诸闭集 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 中, 只要一个是有界的, 尽管其余的无界, 定理仍然成立.

284. 对于无界集而言, 这些命题都不正确. 例: 设 $A_n=[n,+\infty)$, 有

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$，且所有的 A_n 都是闭的（但并非有界），它们的交是空集．这个例子表明：对于无界闭集而言，第 280 题中的断言失效．为了说明当全部集 A_n 为无界集时，283 题的断言也失效，再看同一的例 $A_n=[n, +\infty)$，这里，诸集中任意有限个的交是非空的，可是全部 A_n 的交集却是空集．

285. 可以．例如，可以用下面的方法：设 c_1 是一秩邻接区间的中点（即 $c_1=0.5$）．c_2 是在 c_1 右边的二秩邻接区间的中点（即开区间 $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 的中点）．一般地，c_{k+1} 就是在 c_k 右边的、第 $k+1$ 秩邻接区间的中点．那时，康托集 D 便分成了下面的两两不相交、非空的闭集之和：

$$D=(D\cap[0, c_1])\cup(D\cap[c_1, c_2])\cup(D\cap[c_2, c_3])\cup\cdots\cup(D\cap[c_k, c_{k+1}])\cup\cdots\cup\{1\}.$$

其中 $\{1\}$ 表坐标为 1 的单点集．

286. 正方形 $[0, 1]\times[0, 1]$ 可以表成垂直线段：$x=\text{const}$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的和，这些线段所成之集有连续势，其中每一个是非空的完备集，它们又互不相交，其和就是已给出的正方形．

287. 这个集的全部点都是孤立的（参看 132 题），于是这个集是有限或可数的．如果它是不可数的，则它至少有一个属于此集的凝聚点．

288. 整个康托集 D 是导集（这样一来，在此题中作出的集 E 还可以作为说明 136 题和 213 题的一个例子）．闭包 $\bar{E}=E\cup D$．

第二级的导集重合于一级导集（即等于 D），闭集 $\bar{E}$ 分成完备集 D 和可数集 E 的和．

289. 集 E 是闭的．用下面方法把它表为完备集与可数集的和：完备集由 D 和一切闭区间 $\left[a_n+\frac{\delta_n}{4},\ a_n+\frac{3\delta_n}{4}\right]$ 的和组成；而可数集就是一切点

$$a_n+\frac{\delta_n}{8},\ a_n+\frac{7\delta_n}{8}\quad(n=1, 2, 3, \cdots)$$

组成的集．

290. 交集 $[a, b]\cap E$ 是闭的．我们证明它不含孤立点．

设 $x_0\in[a, b]\cap E$．因为 $a\bar{\in}E$，$b\bar{\in}E$，则 x_0 是闭区间的内点．作一任意的邻域 $V(x_0)\subset[a, b]$．在这个邻域内有不同于 x_0 的点 $x\in E$，即有 $x\in[a, b]\cap E$，因而，在 x_0 的任一邻域内有异于 x_0 的点 $x\in[a, b]\cap E$，这表示 x_0 不是集 $[a, b]\cap E$ 的孤立点．

这样一来，集 $[a, b]\cap E$ 是完备集.

291. 研究两种情形：1) 开区间的端点 α 和 β 两个都不属于 E; 2) 至少一个端点属于 E.

在第一种情形下，等式 $(\alpha, \beta)\cap E=[\alpha, \beta]\cap E$ 成立. 这个等式的右端已是完备集(参看上题)，于是，集 $(\alpha, \beta)\cap E$ 是完备的.

现在来看第二种情形. 设 $\alpha\in E$ 和 $\beta\in E$(如果 α, β 中只有一个属于 E, 证明是类似的). 因为集 E 是无处稠密的，则在任意的开区间 (α, α') 中有不属于 E 的点，因此存在如此点列 $a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots$，它们不属于 E, 而又收敛于 α. 由于同样的理由，又得出不属于 E, 而收敛于 β 的点列 $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$. 并且，总可以认为 $a_1<b_1$(图 31). 那末，集 $(\alpha, \beta)\cap E$ 是下列集的和：

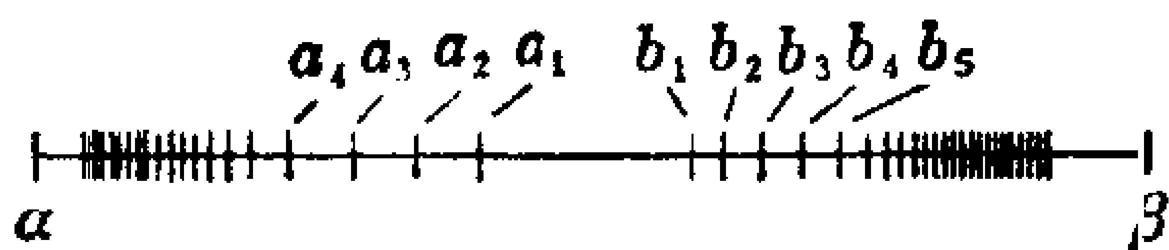


图 31

$$(a_1, b_1)\cap E, (a_2, a_1)\cap E, (a_3, a_2)\cap E, (a_4, a_3)\cap E, \cdots$$

和

$$(b_1, b_2)\cap E, (b_2, b_3)\cap E, (b_3, b_4)\cap E, \cdots.$$

如果这些集全是空的，则 $(\alpha, \beta)\cap E$ 也是空的(从而也是完备的). 如果其中有非空的，则它们中的每一个是完备的(参看第一种情形). 如果这些集是有限个，则它们的和(即 $(\alpha, \beta)\cap E$)也是完备集. 如果这些集的个数是可数的，则它们的和(即 $(\alpha, \beta)\cap E$)是可数个两两互不相交的完备集的和.

292. 首先注意 $P\setminus Q=P\cap CQ$, 这里 CQ 是开集. 设 $CQ=\bigcup_i(\alpha_i, \beta_i)$, 这里 (α_i, β_i) 是构成区间，于是 $P\setminus Q=\bigcup_i[(\alpha_i, \beta_i)\cap P]$. 如果 $P\setminus Q$ 非空，则在集 $(\alpha_i, \beta_i)\cap P$ 中至少有一个非空. 由上题的解，每一非空集 $(\alpha_i, \beta_i)\cap P$ 或是完备的，或是可数个两两互不相交的完备集之和. 这时，诸集 $(\alpha_i, \beta_i)\cap P$ 的和(即 $P\setminus Q$)或为完备集，或为可数个两两互不相交的完备集之和.

293. 设 $A=\bigcup_n E_n$, 其中 E_n 是无处稠密的完备集. 可以把这个和用下面的方式表示：

$$A=E_1\cup(E_2\setminus E_1)\cup[E_3\setminus(E_1\cup E_2)]\cup\cdots\cup[E_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i]\cup\cdots \quad (1)$$

在这个和中，诸项之中两两互不相交，每一项或是无处稠密的完备集，或是两个无处稠密的完备集之差，如果它是两个无处稠密的完备集之差，则根据上题结果，它可表成可数个两两互不相交的完备集的和.

由此推出(由于等式(1))：集 A 可表成可数个两两互不相交的、无处稠密的完备集的和.

294. 设 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\cdots$, $[a_i, b_i]$, $\cdots$ 是任何的可数个两两无公共点的闭区间. 我们要证明：这些闭区间的和 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]$ 不能填满全直线. 先考虑这些闭区间内部之和，即开区间 (a_i, b_i) 的和 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. 用 E 表示此和的余集. 它是闭的，非空(由于点 a_1, b_1, a_2, b_2, $\cdots$ 包含在这个余集中，由此推知它是非空的). 此外，因为 E 的邻接区间两两无公共端点(如果两个开区间 (a_i, b_i) 和 (a_k, b_k) 有公共端点，则闭区间 $[a_i, b_i]$ 和 $[a_k, b_k]$ 的交就非空，这与条件矛盾)，所以，E 是完备集. 由 E 是完备集推出它具有连续统的势.

现在转来看已给的闭区间序列的和，这个和的余集只在可数点集

$$C\{\bigcup_i [a_i, b_i]\} = E\setminus\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\}$$

上与 E 不同. 于是集 $C\{\bigcup\limits_i [a_i, b_i]\}$ 也有连续统的势. 因而也是非空的.

这就表示：可数个两两互不相交的闭区间之和不能填满全直线.

295. 不能. 例如，如果开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 可以表成可数个两两互不相交的闭区间之和，则用连续函数 $y=\operatorname{tg}x$ 把这个开区间映到整个 Oy 轴上，我们就可以把此 Oy 轴表成可数个两两互不相交的闭区间之和. 这是不可能的(参看 294 题).

类似地证明任意开区间 (a, b) 不能表成可数个两两互不相交的闭区间之和.

296. 不能. 假定闭区间 $[a, b]$ 表成了这样的和：$[a, b] = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i]$, 此时，设闭区间 $[a, b]$ 的左端点属于闭区间 $[\alpha_1, \beta_1]$ (即 $a=\alpha_1$)，而右端点属于闭区间 $[\alpha_2, \beta_2]$ (即 $b=\beta_2$). 那末，其余的一切闭区间 $[\alpha_3, \beta_3]$, $[\alpha_4, \beta_4]$, $[\alpha_5, \beta_5]$, $\cdots$ 之和便组成了开区间 (β_1, α_2) (图 32)，这是不可能的(参看前题).



图 32

297. 在$[0, 1]$上用下面的方法作完备集序列$A_1, A_2, A_3, \cdots$: A_1取成康托集. 为了构造$A_n(n>1)$, 我们把闭区间$[0, 1]$分成n个长度相等的闭区间$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$, 而且, 在这些闭区间的每一个内, 用类似于作出康托集的方法①作出完备集. 一切这些集的和叫做A_n.

现在令$A=\bigcup\limits_n A_n$, $B=[0, 1]\setminus A$. 要证明对于任意的α和$\beta(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1)$, 交集$A\cap(\alpha, \beta)$和$B\cap(\alpha, \beta)$有连续统的势.

无论开区间(α, β)是怎样的, 只要n充分地大, 总有闭区间$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$在$(\alpha, \beta)$之内. 根据作法, A_n与闭区间$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$的交是完备集(相似于康托集). 因而, $A_n\cap\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$有连续统的势. 又因为$A\supset A_n$, $(\alpha, \beta)\supset\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, 则集$A\cap(\alpha, \beta)$一定具有连续统的势.

集$B\cap(\alpha, \beta)$可以作为在(α, β)上处处稠密的开集$CA_1, CA_2, CA_3, \cdots$之交(这里是对开区间(α, β)取的余集). 但是, 这些集的交有连续统的势(参看270题), 因而有

$$\overline{\overline{B\cap(\alpha, \beta)}}=c.$$

298. 第一秩邻接区间由所有那些数组成, 其三进位展式中第一位一定等于1②. 每一个第二秩邻接区间由那些数组成, 其三进位展式(在已确定第

① 例如, 在闭区间$\left[0, \frac{1}{n}\right]$上按照以下方法来作: 把它分成三等分, 删去中间的一个开区间. 然后, 又把其余的闭区间都分成三等分, 再删去它们中间的开区间, 等等. 经过可数次后, 留下的集就是所要求的完备集.

② 要这样来理解"一定". 如果x有两种不同的三进位小数表示式: 一个在第一位是1, 而另一个在第一位不是1$\left(例如\frac{1}{3}\right)$, 那末, 我们不把$x$算作在第一秩区间之内. 换句话说, 当且仅当任何三进位小数展式中, 小数点后的第一位总是1的那样的x才包含在第一秩区间之内.

一位数的情况下)中，第二位数一定是1. 一般地，每一个第k秩邻接区间由那些数组成，其三进位展式(在已确定前$k-1$位数的情况下)中，第k位数一定是1. 由此推出，从[0, 1]中去掉所有的邻接区间后剩下的集是而且仅是由闭区间[0, 1]的那些数组成，那些数的三进位小数表示式中，每一位的数都不是1.

299. 康托集的第一类点由一切那些数组成，它们是三进位有理数(即是可以表示成有限的三进位小数)，而同时，又允许其三进位展式中不出现1.

第二类点就是那些点，它们的三进位表示式中没有1，而且它们是三进位无理数(即在它们的表示式中有无穷多个0和无穷多个2).

300. 在数0.1和0.2间有无穷多个第一类点，其中之一是$x=\frac{1}{9}$(它的三进位小数表示式是$x=0.0100\cdots$. 因而这个点是三进位有理点；它的三进位表示式又可以写成没有1的形式：$x=0.00222\cdots$，因而这个点属于康托集).

301. 在这两数间有无穷多个第二类点. 例如，三进位小数的表示式为$0.00202020202\cdots$的点x，便是在数0.05和0.1间的第二类点(容易看出，$x=\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\frac{2}{3^7}+\cdots=\frac{1}{12}$，因而$\frac{1}{20}<x<\frac{1}{10}$；因为它的三进位表示式中含有无穷多个2和无穷多个0，因此，它是康托集的第二类点). 并且，它是有理点[①].

302. 闭区间[0, 1]的任一二进位无理点唯一地展成无限二进位小数$0.a_1a_2a_3\cdots$，其中$a_i=0$或1，而且在展式中既有无穷多个0又有无穷多个1. 同时，每一个这种类型的无限小数表示闭区间[0, 1]的某个二进位无理点.

康托集D的任意一个第二类点可以唯一地展成无限三进位小数$0.b_1b_2b_3\cdots$，这里$b_i=0$或2. 而且在展式中既有无穷多个0，又有无穷多个2. 同时，这种类型的每一个无限小数表示集D的某一个第二类点.

在闭区间[0, 1]的二进位无理点$x=0.a_1a_2a_3\cdots$和康托集D的第二类点$y=0.b_1b_2b_3\cdots$之间，用下面的方法建立一一对应. 点$x=0.a_1a_2a_3\cdots$对应于这样的点$y=0.b_1b_2b_3\cdots$，使$b_i=2a_i$(即若$a_i=0$，则$b_i=0$；若$a_i=1$，则$b_i=2$). 显然，对应是一一的，且保持了先后次序. 即这个对应在[0, 1]上的二进位无理点所成之集与D中的第二类点集之间确定了相似性.

303. 虽然有同样的势(两个都可数)，但这些集不相似. 用反证法来证

① 在十进位制的数中. 若在三进位制中，则为无理点了. (译者注)

明它们不相似. 用R表示闭区间[0, 1]上的有理数集, 用X表示康托集的一切第一类点所成之集. 假定在集R和集X的元之间存在着保持先后次序的一一对应$r\longleftrightarrow x$(其中$r\in R$, $x\in X$). 设x_1和x_2是同一邻接区间的两个端点,它们对应于R中的点r_1和r_2,且如果$x_1<x_2$,则有$r_1<r_2$.

用r_3表示在r_1和r_2间的任一有理数. 设$r_3\longleftrightarrow x_3\in X$. 因为在$x_1$和$x_2$之间没有集$X$的点,则或是$x_3<x_1$,或是$x_3>x_2$. 而这时对应$r\longleftrightarrow x$就不是相似对应了(事实上,如$r_1<r_3<r_2$,那末,或$x_3<x_1<x_2$,或$x_1<x_2<x_3$). 这意味着,在集$R$和$X$之间建立相似对应是不可能的. 因此,这些集不相似.

304. 可在书«Введение в общую теорию множеств и функций» П. С. Александров(1948 年版)中 68—69 页第三章的第一节的定理1及系中,找到这个事实的证明[①].

305. 不存在. 我们来证明这个事实. 在康托集D中取一个第一类点x_0,并取它的任意邻域I. 因为D无孤立点,则交$I\cap D$也无孤立点. 因而闭包$\overline{I\cap D}$是完备集. 但非空的完备集(因为至少含一点x_0,因此它非空)有连续统的势,集$I\cap D$也有连续统的势(它与其闭包至多在两个端点处不同),因而集$I\cap D$不可能只含第一类点(它们总共才可数个),所以应含有第二类的点. 这样一来,每一个甚至只含集D中一个第一类点的开区间I也含有集D中的无穷多个第二类点.

应该注意,这些讨论不仅对于康托集,而且对于直线上任意的完备集D都是有效的.

306. 非空的完备集E是不可数的. 因而,由已知点x到不同的点$y\in E$的距离所成之集也是不可数的(在直线上最多两点y_1和y_2到x的距离相等),即是在一切距离$\rho(x,y)$ $(y\in E)$之中一定有些为无理数(因为距离为有理数者只是可数个).

307. 连续统的势. 推理如下: 每一开集可以表成具有有理端点的开区间之和(事实上,如果Γ是开集,则每一点$x_0\in\Gamma$能够含于在Γ内的、具有有理端点的开区间之中. 于是Γ便是这些开区间之和). 一切具有有理端点的开区间是可数的,因而,由这些开区间的不同组合所成之集具有连续统的势. 因为每一开集并非唯一地表成具有有理端点的开区间之和,则在直线上一切开集所成之集$\mathfrak{G}$具有小于或等于c的势: $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}\leqslant c$.

---

① 此书有杨永芳译的中译本(集与函数的泛论初阶). (译者注)

另一方面，在直线上的开集之中，形如$(0,a)$（其中$a>0$）的一切开区间所成之集具有连续统的势. 因而，直线上一切开集所成之集的势不小于c，即$\overline{\overline{\mathfrak{C}}}\geqslant c$.

比较所得的两个不等式，便得$\overline{\overline{\mathfrak{C}}}=c$.

308. 连续统的势. 类似于上题进行证明. 同时要利用下面的事实：平面上任何开集可以表成有理圆之和(参看241题).

309. 连续统的势. 推理如下：在直线上，所有开集所组成的集和所有闭集组成的集之间存在着一一对应(每一闭集对应以它为余集的开集).

因为直线上由一切开集而成的集具有连续统的势c（参看308题)，则在直线上由一切闭集而成的集也有势c.

310. 连续统的势. 证明：在直线上一切完备集组成的集$\mathfrak{P}$的势不大于一切闭集所成集之势，因而$\overline{\overline{\mathfrak{P}}}\leqslant c$.

另一方面，在完备集中有形如$[0, a]$（其中$a>0$）的一切闭区间，这些闭区间所成之集有连续统的势. 因而，由所有完备集而组成的集$\mathfrak{P}$的势大于或等于连续统的势：$\overline{\overline{\mathfrak{P}}}\geqslant c$.

比较所得出的两个不等式，便推出$\overline{\overline{\mathfrak{P}}}=c$.

311. 为了证明这些集是完备的，只要证明下面的事实就够了：这些集中的每一个的一切邻接区间两两没有公共的端点.

建议读者直接证明：这些集的每一个都没有孤立点(不要使用在直线上造完备集的一般定理).

312. 我们来作一个不含任何一个有理点的非空完备集. 为此，先用任意的方法把直线上所有的有理点编号：

$$r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots$$

再以任意的无理数ε_1为半径作r_1的邻域，把它叫做I_1. 其次，在$r_2, r_3, \cdots, r_k, \cdots$中找出不在$I_1$中的第一个点，设它是$r_{k_2}$. 显然，它不是开区间$I_1$的端点（这个开区间的端点均为无理数). 再作$r_{k_2}$的，以无理数$\varepsilon_2$为半径的邻域，它不与$I_1$相交，而且与它没有公共端点. 用$I_2$表示这个邻域.

下一步是在$r_{k_2+1}, r_{k_2+2}, \cdots$中找出第一个既不在$I_1$内，又不在$I_2$内的点，设它是$r_{k_3}$. 它不是开区间$I_1, I_2$的端点. 因此，可以作出它的以无理数$\varepsilon_3$为半径，与$I_1, I_2$都不相交，并且与它们都没有公共端点的邻域. 此邻域用I_3表示.

用相同的方法继续作下去，我们便造出不相交的开区间序列$I_1, I_2, \cdots$.

这些开区间之和的余集E就是所求的完备集.

因为集E是开集(作为开区间I_k的和)的余集,所以,集E是闭的. 因它含有全部删去的开区间I_k的端点,所以,它非空. 又因为根据作法,它的邻接区间$I_1, I_2, \cdots$没有公共端点,故它也没有孤立点. 因此,所作出的集是非空的完备集.

此外,这个集不含任何一个有理点(它们全部包含在$I_1, I_2, \cdots$中),因而,它只由无理点组成.

最后指出它是无处稠密的: 因为任何的开区间(α, β)含有不属于完备集E的点(例如有理点). 又由于E是闭集,则这就是使E是无处稠密的充分条件(参看 206 题).

313. 存在. 用解上题时用过的方法,便可作出这样的完备集.

314. 因为在集$E_0, E_1, E_2, E_3, \cdots$中的每一个集没有孤立点,集$F$也没有孤立点.

集F是闭的. 这是因为它对于整个闭区间$[0,1]$的余集是开集(即集E_1、$E_2, E_3, \cdots$的全部邻接区间的和). 由此也推出: 集$E_1, E_2, E_3, \cdots$的全部邻接区间而且只有它们才是集F的邻接区间.

再证明集F在闭区间$[0,1]$上是无处稠密的. 设(a, b)是闭区间$[0,1]$上的任意的开区间,由于E_0无处稠密,这个开区间便含有一个开区间I,它完全不含集E_0的点. 于是,对于某个n_0,有$I \subset (\alpha_{n_0}, \beta_{n_0})$(此处$(\alpha_{n_0}, \beta_{n_0})$是集$E_0$的某个邻接区间).这个开区间也没有诸集$E_1, E_2, \cdots, E_{n_0-1}, E_{n_0+1}, \cdots$中的点. 又因$E_{n_0}$是无处稠密的集,则在开区间$I$中也有一个不含集$E_{n_0}$点的子开区间$I_0$,于是,开区间$I_0$没有集$E_0$, E_1, $E_2, \cdots$的点,即开区间I_0没有F的点.

这表示: 任意的开区间(a, b)含有一个其中无F的点的子开区间. 这样,集F在直线上便是无处稠密的.

315. 因为集E是开集(一切开圆v_n的和)的余集,便得出集E是闭集的结论.

要证明这个集在平面上的无处稠密性,应当注意: 任意的开圆V至少含有一个为其内点的有理点(参看 193 题),设它为M_n. 作M_n的、包含在V中的邻域U_n,且要它的半径小于$\frac{\alpha}{n^2}$. 此时,这个邻域完全不含集E的点. 这样一来,平面上任意的开圆V中,含有一个没有集E的点的较小的圆. 这就是说,集E在平面上是无处稠密的.

316. 我们把中心那个被去掉的开的正方形叫做一秩开正方形. 而把在平面上去掉中间那个开正方形后剩下的 8 个闭正方形叫做一秩闭正方形(图 33, (a)). 类似地定义二秩闭正方形(它们共 8^2 个,每一个的边长是$\frac{1}{3^2}$, 参看图 33, (b))和二秩开正方形(它们共 8 个, 其边长是 $\frac{1}{3^2}$).

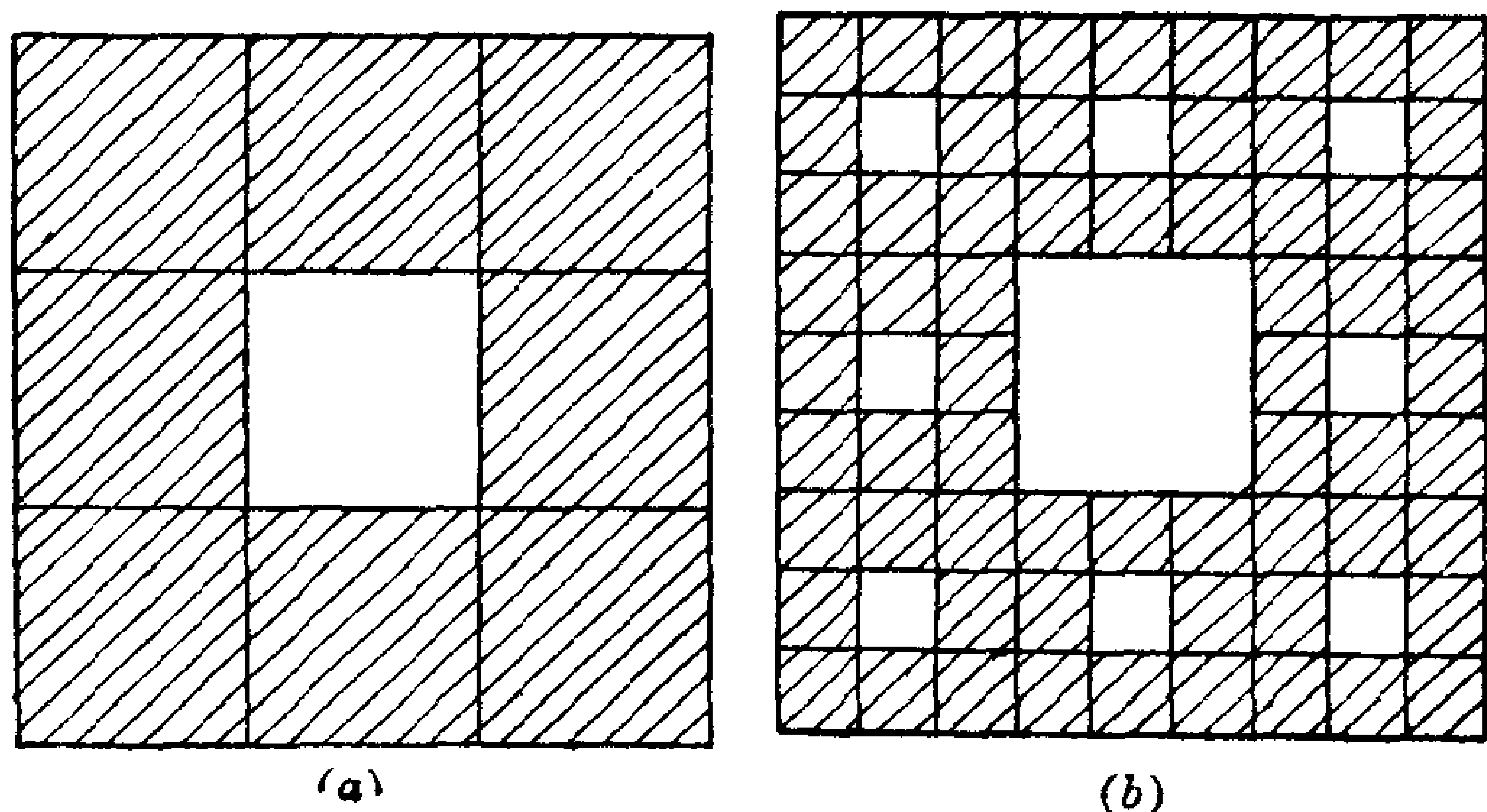


图 33

容易看出,用这种方法可以定义一切秩的开正方形和闭正方形.

令 P_n 表示全部 n 秩闭正方形之和,显然有 $A=\bigcap\limits_n P_n$. 因为每一个集 P_n 是闭的,则它们之交(即集 A)也是闭的.

为了证明 A 是无处稠密的,我们考察任意的开圆 J. 这个圆或者完全不含集 A 的点, 或者至少含有这个集的一点 M. 我们要证明: 在后一种情况下圆 J 内有一个完全不含集 A 的点的较小的圆. 为了断定这一点,我们找出某个 n 秩闭正方形 K_n,它含有 M 点,并且它的对角线之长小于由点 M 到圆 J 的边界的距离(因为闭正方形的对角线是在秩数 n 趋于无穷时而趋于零的,所以这件事是可以做到的). 这个正方形完全在圆 J 之内 (图 34),那末,在正方形 K_n 中心的第 $n+1$ 秩开正方形 (也在圆 J 之内) 完全不含 A 的点. 在这个开正方形内作出内切圆 v,该圆 v 在圆 J 内, 且不含 A 中之点. 于是, A 是平面上的无处稠密集.

用类似的方法证明 A 无孤立点: 设 $M_0\in A$, 作 M_0 的任意邻域 J,再作一个包含 M_0, 且完全包含于 J 中的闭正方形 K_n(图 35). 那末, 这个正方形的

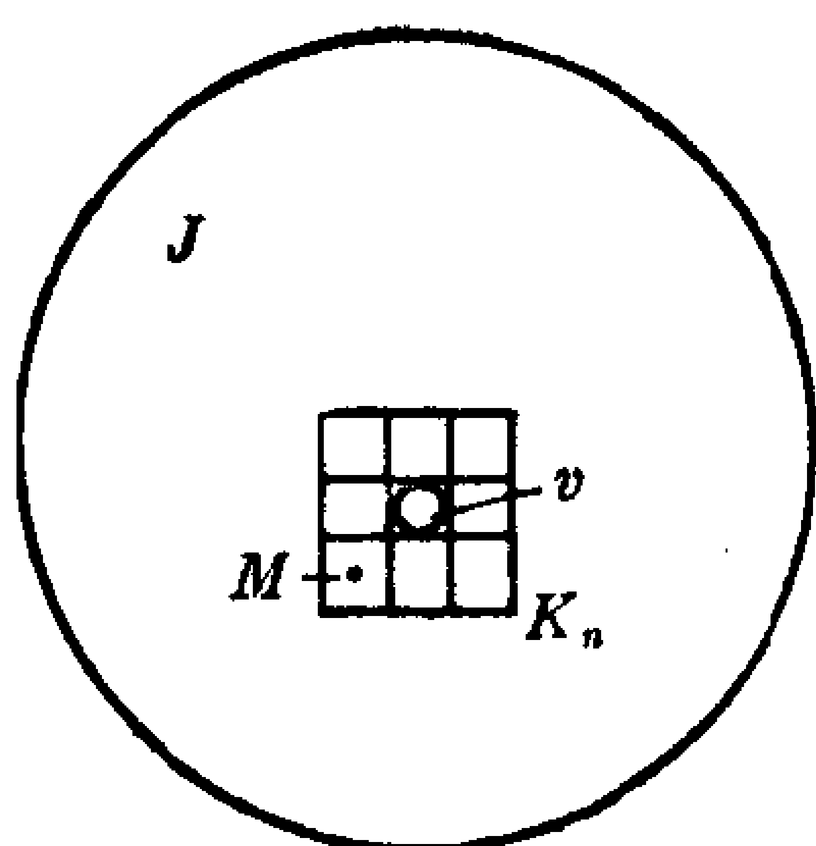


图 34

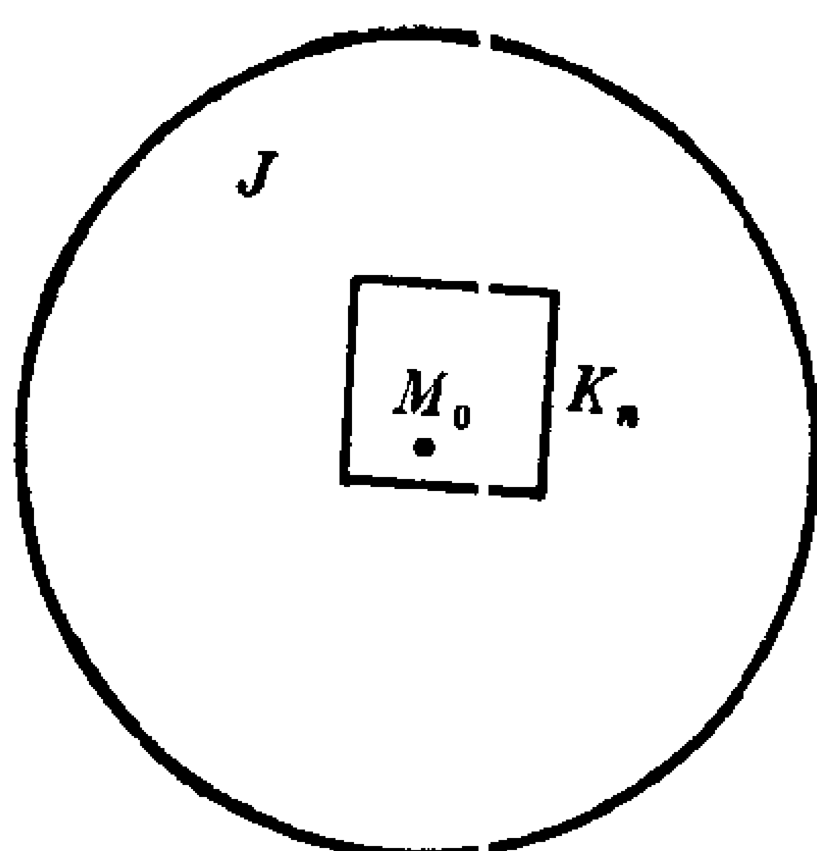


图 35

边界属于集 A 且也含于 J 中. 即是 M_0 不是孤立点.

因为 A 是闭的, 且不含孤立点, 则 A 就是完备集.

现说明集 A 的算术结构: 第一步, 我们从最初的正方形中除去这样一些点 $M(x, y)$, 它的横坐标和纵坐标的小数后第一位上一定含 1 (在展成三进位小数时). 第二步, 我们除去这样的一些点, 它的横坐标, 纵坐标的小数后第二位上一定为 1, 等等. 这样一来, 集 A 中就是这样的一切点 $M(x, y)$: 其横坐标和纵坐标可以表成这样的三进位小数: $x=0.a_1a_2a_3\cdots$, $y=0.b_1b_2b_3\cdots$, 且对于任何的 k, 等式 $a_k=b_k=1$ 都不成立. 这样, 例如①, $M_1(0.212121\cdots, 0.121212\cdots)\in A$, $M_2(0.202020\cdots, 0.202020\cdots)\in A$, $M_3(0.1000\cdots, 0.1111\cdots)\in A$ (在这种情况下, 虽然 $a_1=b_1=1$, 但此点纵坐标可改写成 $0.02222\cdots$, 从而 $M_3\in A$). 另一方面, $M_4(0.1010\cdots, 0.1021\cdots)\bar{\in} A$ (在第一步就已经除去这一点, 它是包含在一秩开正方形之中的).

317. 证明类似于 316 题. 集 B 的算术结构是这样的: 集 B 由基本正方形中的一切那样的点 $M(x, y)$ 组成, 不论是横坐标 x, 或是纵坐标 y, 在它们的三进位表示式中, 可以表示成不含 1 的三进位小数.

318. 类似地进行研究. 集 E 的算术结构如下: E 由最初给出的正方形中一切这种点 $M(x, y)$ 组成: 它的横坐标是任意的 $(0\leqslant x\leqslant 1)$, 而纵坐标可以写成在其三进位表示式中不含 1 的数.

319. $A=\{[0, 1]\times[0, 1]\}\setminus\{CD\times CD\}$, 其中 CD 是康托集 D 对整个闭区间 $[0, 1]$ 的余集;

$$B=D\times D;$$

$$E=[0, 1]\times D.$$

① 这里以及后面点 M_1, M_2, M_3, M_4 的坐标都用三进位小数给出.

第七章　集的测度

320. 轴 Ox 是平面上的零-集，而零-集的一切子集也是零-集．但一切零-集是可测的．因而，数轴上一切子集在平面 Oxy 上可测且它的面测度等于零．

321. 康托完备集 D 的线测度为零，因而，它的每一个子集的线测度也为零，所以是可测的．康托集的一切子集之族具有超连续统之势 2^c，这是因为 $\overline{\overline{D}}=c$．即是说，数直线上一切可测集之集族的势大于或等于 2^c：$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}\geqslant 2^c$．

另一方面，直线上的一切集之集族具有势 2^c．因为 $\mathfrak{A}$ 是直线上一切集组成的集族的一部分，那末，$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}\leqslant 2^c$．

比较这两个不等式得：

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}=2^c.$$

322. 可取 199 题中作出的完备集作为一个例子；这里仅需取数 0.1 作为 A．那末，被挖去的开区间的长度之和等于 $A=0.1$，即是说，剩下完备集的测度等于 $1-0.1=0.9$．

323. 参看 199 题(这里仅需取正数 $1-a$ 作为 A)．

324. 不能．测度为零的开集 CE 是这种集 E 的余集(对整个闭区间 $[0, 1]$ 之余)．而测度为零的开集是空集(如果 CE 含有一点 M_0，那末，可以找到含在 CE 中的一个邻域 $V(M_0)$；且 $mCE\geqslant mV(M_0)>0$)．因为 CE 是空集，所以 E 充满整个闭区间，这与条件 E 在闭区间 $[0, 1]$ 上无处稠密相矛盾．

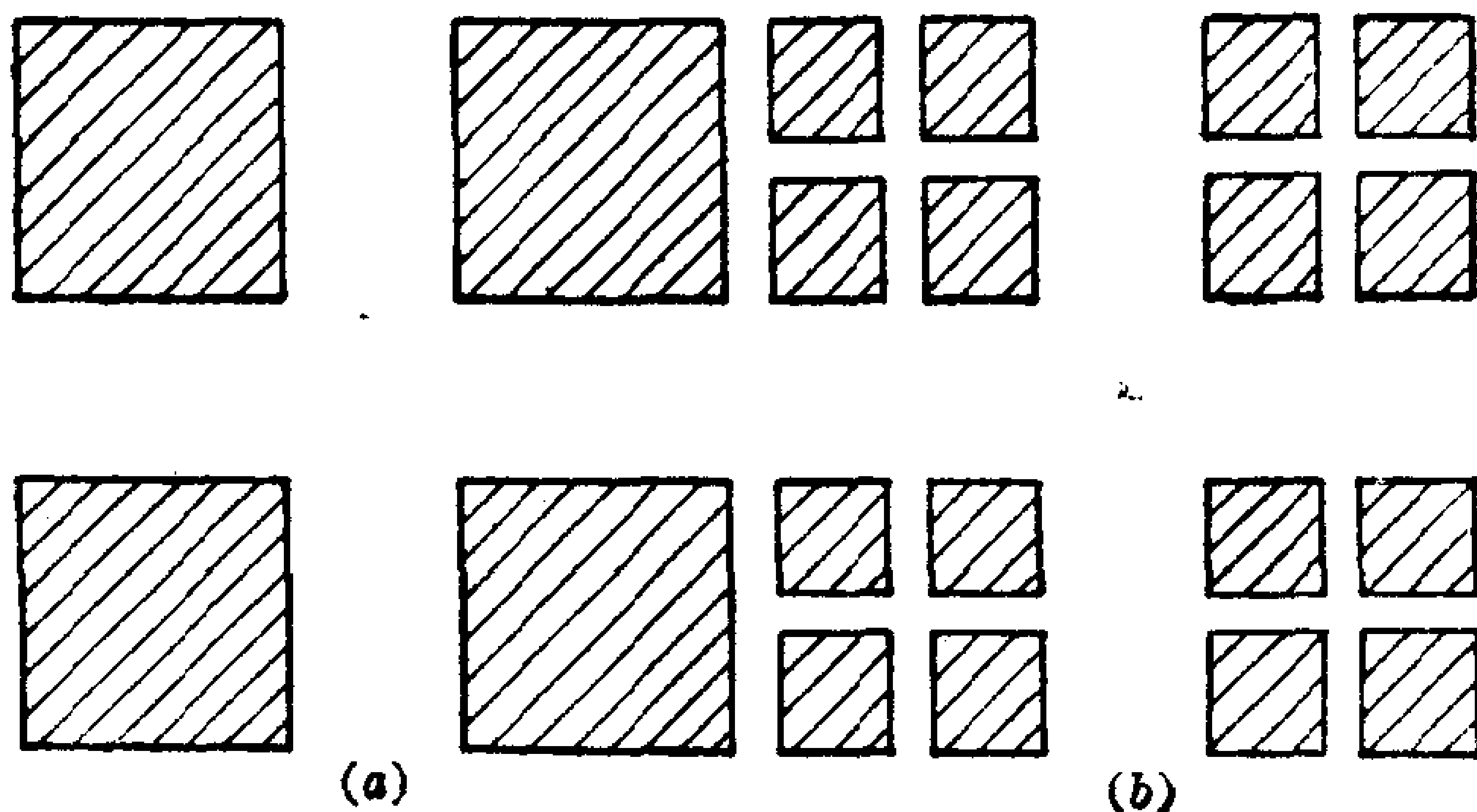


图　36

325. 如同在199题中构造完备集的例子一样构造这种例子. 任意给一其项为递减的正项级数 $a_1+a_2+a_3+\cdots$, 使其和等于 $1-a$. 现在在单位正方形$[0,1]\times[0,1]$中引两条垂直直线和两条平行直线, 使被这些直线截去的十字形的面积等于 a_1, 且去掉这个十字形后余下的四个矩形是闭正方形(图36, (a)). 称这些闭正方形为第一秩正方形; 用 P_1 表其和(P_1 是闭集). 在四个第一秩正方形的每一个中, 引两条垂直和两条平行的直线, 被这些直线截下来的每个十字形的面积等于$\frac{a_2}{4}$, 且在第一秩正方形的每一个中去掉十字形后余下四个闭正方形. 称这些余下的正方形为第二秩正方形, 它们的和用 P_2 表示; 二秩正方形的个数等于 4^2 (参看图36, (b)). 一般地, 设 k 秩正方形已作出 (个数等于 4^k), 那末, 后一秩正方形可以这样作出: 在 k 秩正方形的每一个中, 引两条垂直和两条平行的直线, 使被这些直线截下的十字形的面积等于$\frac{a_{k+1}}{4^k}$, 且去掉这些十字形后余下的矩形是闭正方形(称它们为$k+1$秩正方形, 其和表为 P_{k+1}; 所有 $k+1$ 秩正方形的个数等于 4^{k+1}).

如果取一切 P_k 之交, 那末, 我们就得到一个测度为 a 的完备集. 最后, 一切被去掉的十字形之和是这个集之余集; 而且, 一切被去掉的十字形组成之集的测度等于 $1-a$:

$$a_1+4\cdot\frac{a_2}{4}+4^2\cdot\frac{a_3}{4^2}+\cdots+4^k\cdot\frac{a_{k+1}}{4^k}+\cdots$$

$$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}+\cdots=1-a.$$

于是, 被作出的完备集的余集的测度为 $1-a$; 即意味着完备集本身的测度为 a.

326. 余集的测度等于一切被去掉的所有各秩正方形的面积之和, 即

$$mCA=\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}\cdot 8+\frac{1}{9^3}\cdot 8^2+\frac{1}{9^4}\cdot 8^3+\cdots+\frac{1}{9^{k+1}}\cdot 8^k+\cdots=1.$$

所以, $mA=0$.

327. 余集的测度等于所有被去掉的«十字形»的面积之和, 即

$$mCB=\frac{5}{9}+\frac{5}{9^2}\cdot 4+\frac{5}{9^3}\cdot 4^2+\cdots+\frac{5}{9^{k+1}}\cdot 4^k+\cdots=1.$$

因而, $mB=0$.

328. 余集的测度等于所有被去掉矩形的面积之和, 即

$$mCE=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\cdot 2+\frac{1}{3^3}\cdot 2^2+\cdots+\frac{1}{3^{k+1}}\cdot 2^k+\cdots=1.$$

因而，$mE=0$.

329. 设集 E 在闭区间 $[a, b]$ 上. 考察定义在 $[a, b]$ 上的下面的函数 $f(x)$:

$$f(x)=m([a,x]\cap E)$$

显然. $f(a)=0$, $f(b)=mE=p$ 且 $f(x)$ 是单调增的(不一定严格增). 我们证明函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的一切点处连续. 设 $x\in[a, b]$, 那末,

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x)&=m([a,x+h]\cap E)-m([a,x]\cap E)\\ &=m\{([a,x+h]\cap E)\setminus([a,x]\cap E)\}\\ &=m\{(x,x+h]\cap E\}\leqslant m(x,x+h]=h. \end{aligned}$$

当 $h\to 0$ 时, $f(x+h)-f(x)$ 也趋于 0, 即 $f(x)$ 在点 x 处右连续 (因为 $h>0$). 类似证明 $f(x)$ 在点 x 处左连续. 所以, $f(x)$ 在闭区间的所有点处连续.

在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数取一切中间值. 特别, 可以找到这样的点 ζ, $a<\zeta<b$, 使 $f(\zeta)=q$ (因为, $f(a)<q<f(b)$). 而 $f(\zeta)=m([a, \zeta]\cap E)$. 因而, 含于 E 中的集 $[a,\zeta]\cap E$ 其测度恰好等于 q.

330. 如果 E 是直线上的有界集, 那末, 从上题的解中已得到证明. 如果 E 是直线上的无界集, 那末, 证明如下: 用 E_n 表集

$$E_n=E\cap[-n,n].$$

显然, $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$, 而且, $\bigcup\limits_n E_n=E$. 那末, $mE=\lim\limits_{n\to\infty}mE_n$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=p$. 因按条件 $q<p$, 则可以找到这样的数 n_0, 使 $mE_{n_0}>q$. 记 $mE_{n_0}=r$ (且 $r>q$).

集 E_{n_0} 是有界集且测度为 r. 根据上题的结果, 可以在其中找到这样的可测子集 A, 它的测度等于 q, 而且, $A\subset E_{n_0}$, $E_{n_0}\subset E$, 因而, $A\subset E$.

所以, 如果 E 即使是无界的, 它的测度等于 p, 我们也可以找到集 E 的有界可测子集 A, 使 $mA=q$, 对给定的 $q<p$ 成立.

331. 设 $mE=p>0$, q 是给定的小于 p 的正数. 用 q' 表 p 和 q 之间任一数. 根据上题的结果, 存在集 E 的有界可测子集 A, 使 $mA=q'$. 设 $A\subset[a, b]$.

按可测集的性质, 对任意 $\varepsilon>0$, 可以找到 A 的闭子集, 使该子集的测度大于 $mA-\varepsilon$. 特别能找到这样的闭子集 B, 使 $mB>q$.

最后，像 329 题那样，在闭区间$[a, b]$上可以找到这样一点ζ，使$m([a, \zeta]\cap B)=q$（如果注意到$m([a, a]\cap B)=0$, $m([a, b]\cap B)>q$）.

集$[a, \zeta]\cap B$为二闭集之交，故是闭集．并用C表示之

$$C=[a, \zeta]\cap B, mC=q.$$

在直线上的任何闭集可以表为一可数集N和一完备集D的和集：

$$C=D\cup N.$$

因为，可数集N的测度等于零，那末，$mD=mC=q$．所以，D是具已知测度为q的完备集，且含于最初的集E中（因为，$D\subset C, C\subset B, B\subset A, A\subset E$）.

332. 设$mE=p, p>0$．根据上一题，在集E中可以找到一完备子集D，具有小于p的任意给定的测度，例如，测度为$\frac{p}{2}$．而正测度完备集D是非空的．因而，它的势等于连续势．因为，$E\supset D$，那末，$\overline{\overline{E}}\geqslant c$．从另一方面，$E$是数直线的子集，而数直线为连续势，所以，$\overline{\overline{E}}\leqslant c$.

比较这两个不等式得：$\overline{\overline{E}}=c$．所以，直线上任意具正测度的可测集有连续势.

333. 设E是有界平面集，我们证明如下：设E在Ox轴上的投影为线段$[a, b]$．考察集E_x，E_x是横坐标为x的垂直线从集E上切割下来的那部分（即E中在直线左边的那部分）（图 37）．记$f(x)=mE_x$，那末，$f(a)=0$，$f(b)=p$．容易证明，$f(x)$是$[a, b]$上的连续函数．因而，在$[a, b]$上可以找到这样的点ζ，使$f(\zeta)=q$，因为，$f(a)<q<f(b)$．那末，E_ζ是要求的集：$E_\zeta\subset E$且$mE_\zeta=q$.

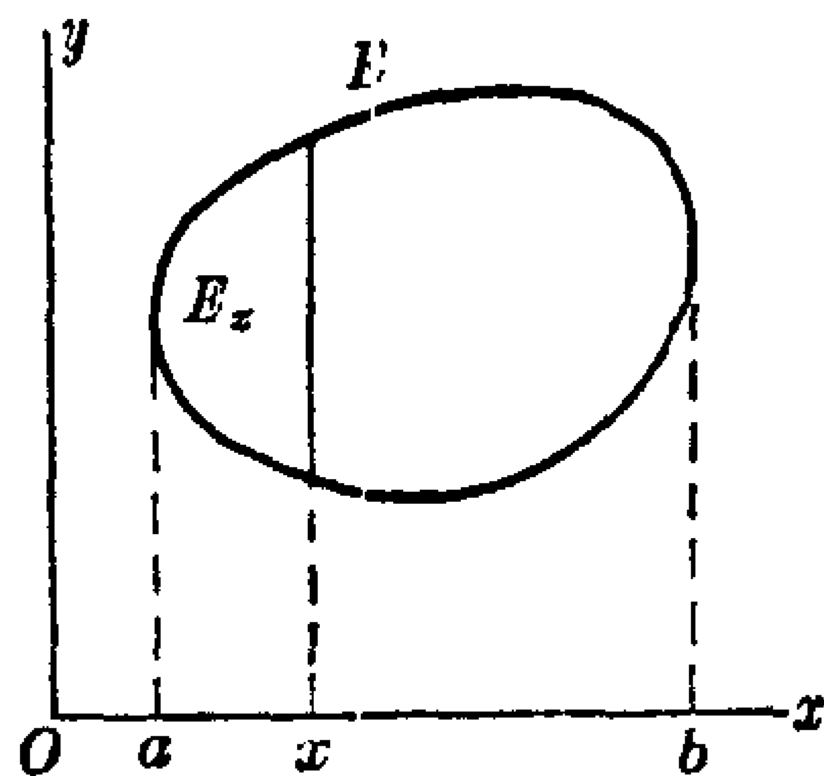


图 37

如果E是无界可测集，证明如同 330 题.

334. 证明如同解 331 题一样（自然，对平面集来说，要利用 333 题的结果）.

335. 设$mE=+\infty$，为了确定起见，可以认为E在数直线上且考察线测度．记$E_n=E\cap[-n, n]$．因为，$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$且$\bigcup\limits_n E_n=E$，那末，$\lim\limits_{n\to\infty} mE_n=mE$，即$\lim\limits_{n\to\infty} mE_n=+\infty$．因而，可以找到这样的$n_0$，使$mE_{n_0}>q$.

设 $mE_{n_0}=p>q$(注意, 因为 E_{n_0} 是有界集, 那末, mE_{n_0} 是有限的).

其次, 利用解 331 题的方法, 可以证明, 能找到一测度为 q 的含于 E_{n_0} 中的完备集 D. 因 $E_{n_0}\subset E$, 所以, $D\subset E$.

336. 不可能. 如果集 E 含内点 x_0, 那末, 点 x_0 有某一邻域 $V(x_0)$ 含在 E 中. 邻域 $V(x_0)$ 的测度是正的(在线测度的情况下, 这个正数是开区间的长度; 在面测度情况下是圆的面积), 所以, $mE\geqslant mV(x_0)>0$.

337. 不能. 如果说闭集 E 的测度等于 $b-a$(这里, $E\subset[a,b]$, $E\neq[a,b]$), 那末, 差 $[a,b]\setminus E$ 一定含内点且测度为零, 而这是不可能的(参看上一题的解).

338. 交 $\bigcap_n E_n$ 可以有无穷测度, 不为零的有限测度, 零测度. 例:

a) 如果 $E_n=\left[-\frac{1}{n},+\infty\right)$, 那末, $\bigcap_n E_n=[0,+\infty)$;

б) 如果 $E_n=[-1,0]\cup[n,+\infty)$, 那末 $\bigcap_n E_n=[-1,0]$;

в) 如果 $E_n=[n,+\infty)$, 那末 $\bigcap_n E_n=\varnothing$.

339. 和集 $\bigcup_n E_n$ 可以有有限的或无限的测度. 例:

a) 如果 $E_n=\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right)$, 那末 $\bigcup_n E_n=[0,1)$;

б) 如果 $E_n=[0,n]$, 那末 $\bigcup_n E_n=[0,+\infty)$.

340. 用 E_1 表 $[0,1]$ 上二进位无尽小数第二位为零的那些点组成之集; E_2 表二进位无尽小数第二位和第四位上为零的那些点组成之集; E_3 表二进位无尽小数第二, 第四和第六位上为零的那些点组成之集, 等等. 显然, $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$ 且 $mE_k=\frac{1}{2^k}$, 对任意的 k. 集 E 是一切 E_k 之交:

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k.$$

因而,

$$mE=\lim_{k\to\infty}mE_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}=0.$$

341. $D\setminus A$ 可以作为这种集的例子, 这里 D 是康托集, 而 A 是它的余区间全部右端点组成之集 (含点零). 因为 $D\setminus A\subset D$, 那末, $m(D\setminus A)=0$. 半

闭区间 (0, 1] 和集 $D\setminus A$ 之间相似性可通过下面的方法确定：将每一点 $x\in(0,1]$ 表为二进位无尽小数 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$，使 x 同点 $y\in D\setminus A$ 对应，而 y 的三进位无尽小数的展式为 $0.b_1b_2b_3\cdots$，这里，$b_i=2a_i$.

342. 在线段上具给定正测度的完备无处稠密集可作为这种集的例子；而这种具给定测度的完备无处稠密集在 323 题的解答中已经作出来了.

343. 能. 例，集 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(k,k+\frac{1}{2^k}\right)$ 无界，而其测度等于 1.

344. 设 E 是直线上测度为零的闭集. 我们证明它在直线上无处稠密.

设 I 是任一开区间，它不可用集 E 的点填满（否则，$mE\geqslant mI>0$）. 设 $x_0\in I$，$x_0\overline{\in}E$. 那末（因为 E 是闭的，那末，CE 是开的）可以找到点 x_0 的一邻域 $V(x_0)$ 不含集 E 中的点. 交 $I\cap V(x_0)$ 是含于 I 中而完全不含集 E 中的点的开区间. 因为 I 是直线上的任意开区间，这就证明了 E 在直线上无处稠密.

对于平面以及三维空间的证明也类似.

345. 测度为零的集的闭包，其测度不一定为零. 例：设 E 是 $[0,1]$ 上的有理数集. 那末，$mE=0$，$m\overline{E}=1$.

346. 测度为零的无处稠密集的闭包，其测度也不一定为零. 例：设 F 是 $[0,1]$ 上具正测度的完备无处稠密集（参看，例如，323 题），而 E 是这个完备集的第一类点组成的集（即 E 是余区间全部端点组成的集）. 那末，E 是可数的无处稠密集，$mE=0$. 同时，$\overline{E}=F$ 且 $m\overline{E}=mF>0$.

347. 如果 E 是正测度集，那末它的势为连续统. 设 x_0 是 E 中任意一点. 那末，一切可能的形如 $\rho(x_0,x)$ $(x\in E)$ 的数是连续统；因而，并非全部这样的数都是有理数. 换句话说，可以找到这样的点 $x\in E$，$\rho(x_0,x)$ 是无理数.

348. 设 E 是 $[a,b]$ 上的可测集，且使 $mE=\mu>0$，将开区间 (0, 1) 上的全部有理数编号：

$$r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots$$

用 E_k 表 E 经平移 r_k 而得到的集（即 E_k 是一切形如 $x+r_k$ 的点组成的集，这里 r_k 是固定的，而 $x\in E$）. 诸集 E_k 彼此可合且其和是 $[a,b+1]$ 上的某一集 H. 我们证明诸集 E_k 中至少有两个集其交非空. 事实上，如果所有的集 E_k 两两不相交，那末，有

$$\begin{aligned}mH&=mE_1+mE_2+\cdots+mE_k+\cdots\\&=\mu+\mu+\cdots+\mu+\cdots=+\infty.\end{aligned}$$

这是不可能的，因为 $H\subset[a,b+1]$，即 $mH\leqslant b+1-a$.

所以，诸集 E_k 中存在这样的两个集 E_i 和 $E_j(i\neq j)$，$E_i\cap E_j\neq\varnothing$. 设 $\zeta\in E_i$, $\zeta\in E_j$. 那末，$\zeta=x+r_i$, $\zeta=y+r_j$（这里 $x\in E$, $y\in E$）；因而，$x+r_i=y+r_j$, 由此，$|x-y|=|r_i-r_j|\neq 0$, 即 $\rho(x, y)$ 是有理数.

这样一来，我们证明了至少存在两个不同的点 $x\in E$, $y\in E$, 它们之间的距离是有理数.

349. 如果 E 是数轴上的具正测度无界集，那末，它含有一有界子集 E_0, 其测度也是正的（参看 330 题）. 根据上一题的结果可以断定，存在这样的点 $x\in E_0$, $y\in E_0(x\neq y)$, 使 $\rho(x, y)$ 是有理数. 而 $E_0\subset E$; 因而，点 x 和 y 属于集 E, 它们之间的距离是有理数.

350. 对每个自然数 n, 作这样的闭集 F_n 和开集 G_n, 使 $F_n\subset E\subset G_n$, $m(E\setminus F_n)<\frac{1}{n}$, $m(G_n\setminus E)<\frac{1}{n}$. 同时，不失一般性，可以认为，$F_{n+1}\supset F_n$, $G_{n+1}\subset G_n$（如果不是这样，那末，可以用 $\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ 代 F_{n+1}, $\bigcap_{i=1}^{n+1} G_i$ 代 G_{n+1}）.

现在考察集序列:

$$E\setminus F_1, E\setminus F_2, \cdots, E\setminus F_n, \cdots$$

显然，对任意 n 有: $E\setminus F_n\supset E\setminus F_{n+1}$; 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E\setminus F_n)=m\{\bigcap\limits_n (E\setminus F_n)\}$; 因而，$m\{\bigcap\limits_n (E\setminus F_n)\}=0$. 而 $\bigcap\limits_n (E\setminus F_n)=E\setminus\bigcup\limits_n F_n$（这是由对偶原理得出），所以，$m(E\setminus\bigcup\limits_n F_n)=0$.

因此，集 $A=\bigcup\limits_n F_n$ 是要求的 F_σ 型集，它含于 E 中且 $m(E\setminus A)=0$.

类似可以证明，一切 G_n 之交是要求的 G_δ 型集（如果 $B=\bigcap\limits_n G_n$, 那末，$B\supset E$, 且 $m(B\setminus E)=0$）.

351. 此集是完备的，无处稠密的（参看，例如，199—201 题）. 余集的测度等于邻接区间的长度之和:

$$mCE=\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9^2}{10^3}+\cdots+\frac{9^k}{10^{k+1}}+\cdots=1.$$

因而，所给集的测度等于零.

352. 此集是在上一题中研究过的集的余集；所以它是开的，在 [0, 1] 上处处稠密；它的测度等于 1.

353. 此集在 $[n, n+1]$ 上的那部分的测度为零，对任意的整数成立(当 $n=0$ 的情形，已在 351 题中证明了；对其他整数 n，证明是类似的)。

整个所给的集是这些部分的和：

$$E=\bigcup_{n}\{E\cap[n, n+1]\}.$$

因为，每一部分的测度都等于零，那末，整个集 E 的测度也等于零。

354. 用 A_k 表 $[0,1]$ 中无尽十进位展式出现数字 k 的一切数所成的集。A_k 的测度等于 1 (参看 352 题)；这个集在$[0, 1]$中稠密。集 A_k 可以这样得出：如果将可以用两种不同的方法展开，在这些无尽展式中有数字 k 的那些点加到十进位展式中不可能没有数字 k 的一切点组成的集中。这样一来，A_k 是一个开集与一个可数集的和集；因而，A_k 是 F_σ 型集。

要求的集 E 是一切 A_k ($k=1, 2, \cdots, 9$) 的交。因而，这个集是 F_σ 型的(参看 179 题)。为了求得 E 的测度，首先求它关于$[0, 1]$之余集的测度：

$$CE=C(\bigcap_{k} A_k)=\bigcup_{k} CA_k$$

$mCA_k=0$，对任意 k 成立。因而，$m(\bigcup_{k} CA_k)=0$，即 $mCE=0$，即是说，$mE=1$。

因为集的测度等于$[0, 1]$的测度，那末，这个集在给定的线段上稠密。

355. 这是个无处稠密完备集，它的测度等于 0.99。

356. 一切开区间的和集 E 是开集：

$$\left(-\frac{1}{20}, \frac{1}{9}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{20}, \frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{20}, \frac{7}{9}+\frac{1}{20}\right)\cup$$
$$\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{20}, 1\frac{1}{20}\right).$$

它的测度等于 $4\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right)=\frac{38}{45}$.

357. 估计全部开区间 u_i 与 v_i 之和的测度。它们之和的测度不超过它们长度的和；所以，

$$m[(\bigcup_{i} u_i)\cup(\bigcup_{i} v_i)]\leqslant\sum_{i}\frac{b_i-a_i}{4}+\sum_{i}\frac{b_i-a_i}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i}(b_i-a_i).$$

和数$\Sigma(b_i-a_i)$等于E的余集的测度；这样一来，$\sum_i(b_i-a_i)=1-0.6=0.4$.

于是，

$$m[(\bigcup_i u_i)\cup(\bigcup_i v_i)]\leqslant 0.2.$$

因为集$(\bigcup_i u_i)\cup(\bigcup_i v_i)$的测度小于$E$的测度，所以这个集不可能覆盖整个集$E$.

358. 在Ox轴的线段$[0,1]$上，作一个仅由无理点组成而测度为$a>0$的完备集E_x(参看312题). 在Oy轴的线段$[0,1]$上也作一个这样的集E_y.

现在要求的集E可以作出：只要取平面Oxy上这样一些点$M(x,y)$，使$x\in E_x$, $y\in E_y$.

容易证明，集E是无处稠密完备集，且它的面测度等于a^2(同325题比较).

359. 作这样的集$B\subset[0,1]$，使对任何的开区间$(a,b)\subset[0,1]$有$m\{(a,b)\cap B\}>0$, $m\{(a,b)\cap CB\}>0$是可能的. 现给出构造这种集的一例.

设$\gamma_1>\gamma_2>\cdots>\gamma_i>\cdots$是任一正数序列，且使级数$\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i$收敛，和数小于1. 此外，设$\eta_1>\eta_2>\cdots>\eta_i>\cdots$是任意趋于零的递减正数序列.

[①]记闭区间$[0,1]$中测度为γ_1而使一切邻接区间长度都小于η_1的无处稠密完备集为A_1.

其次，记集A_1的每一个邻接区间(α,β)中测度等于$(\beta-\alpha)\gamma_2$，而在(α,β)上的一切邻接区间的长度$<\eta_2$的完备集. 一切这样的完备集之和表为A_2[②]；显然，$mA_2=\gamma_2 mCA_1<\gamma_2$(这里及以后，符号$C$均表对整个线段$[0,1]$的余集).

和$A_1\cup A_2$是无处稠密完备集，且使$0<m(A_1\cup A_2)<\gamma_1+\gamma_2$；它的一切邻接区间的长度$<\eta_2$(参看314题).

现设集$A_1,\cdots,A_n$已作出，且$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$是完备集；下作集A_{n+1}. 为此，记集

---

① 记闭区间$[a,b]$或开区间(a,b)中的完备集一语表示作一完备集使其含于$[a,b]$或(a,b)中的意思.

② 这里仍然要求A_2是无处稠密完备集.(译者注)

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 的每一个邻接区间(α, β)中测度等于$(\beta-\alpha)\cdot\gamma_{n+1}$，而在$(\alpha, \beta)$上的一切邻接区间的长度$<\eta_{n+1}$的完备集. 所有这些完备集之和表为$A_{n+1}$；显然，$mA_{n+1}=\gamma_{n+1}m\{C(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\}<\gamma_{n+1}$.

和$\sum_{i=1}^{n+1} A_i$是无处稠密完备集，它的测度小于$\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i$，它的一切邻接区间长度$<\eta_{n+1}$.

取一切A_i，$1\leqslant i<+\infty$的和，我们就得到要求的集$B=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

设$(a, b)\subset[0, 1]$是任意开区间；我们证明$m\{(a, b)\cap B\}>0$，$m\{(a, b)\cap CB\}>0$. 为此，我们取这样的n，使$\eta_n<\frac{b-a}{3}$. 集$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$是无处稠密的，完备的，它所有的邻接区间的长度都小于η_n. 所以，在开区间(a, b)中，至少可以找到这个集的一个邻接区间，记这个邻接区间为I. 那末，$I\cap A_i=\varnothing$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，$m\{I\cap A_{n+1}\}=|I|\gamma_{n+1}$，这里$|I|$是开区间$I$的长度；其次，$m\{I\cap A_{n+2}\}\leqslant|I|\cdot\gamma_{n+2}$，$m\{I\cap A_{n+3}\}\leqslant|I|\cdot\gamma_{n+3}$，等等.

此外，我们注意，$B\supset A_{n+1}$，$(a, b)\supset I$. 所以，$(a, b)\cap B\supset I\cap A_{n+1}$. 因而，

$$m\{(a, b)\cap B\}\geqslant m\{I\cap A_{n+1}\}=|I|\cdot\gamma_{n+1}>0$$

现为了证明$m\{(a, b)\cap CB\}>0$，记住$B=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，这里$A_i$是两两不相交的. 所以，

$$I\cap B=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{I\cap A_i\},\text{且}$$

$$\begin{aligned} m\{I\cap B\}&=\sum_{i=1}^{\infty} m\{I\cap A_i\}\\ &\leqslant|I|\cdot\gamma_{n+1}+|I|\cdot\gamma_{n+2}+|I|\cdot\gamma_{n+3}+\cdots\\ &<|I|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i<|I|. \end{aligned}$$

所以，$m\{I\cap B\}<|I|$，而$(I\cap B)\cup(I\cap CB)=I$，由此得出，$m\{I\cap B\}+m\{I\cap CB\}=|I|$. 因而，$m\{I\cap CB\}>0$. 因为$I\subset(a, b)$，那末，更有

$$m\{(a, b)\cap CB\}>0.$$

这样一来，我们证明了所作出的集 B 满足全部要求的条件.

360. 可能. 我们引出一相应的例子. 对每个自然数 n，在线段 $[a, b]$ 上作一无处稠密完备集 E_n，使 $mE_n=b-a-\frac{1}{n}$. 我们证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 的测度为 $b-a$. 为此，作辅助的递增完备集序列 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，其中

$$A_1=E_1,\quad A_2=E_1\cup E_2,\quad A_3=E_1\cup E_2\cup E_3,\ \cdots,$$
$$A_n=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n,\ \cdots$$

显然，对任意 n 有：$b-a-\frac{1}{n}\leqslant mA_n<b-a$（因为，$A_n\supset E_n$，那末，$mA_n\geqslant mE_n$）. 因而，$\lim\limits_{n\to\infty}mA_n=b-a$. 而因序列 A_n 递增，那末，$m\left(\bigcup\limits_{n}A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}mA_n=b-a$. 最后，注意 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，得

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=b-a.$$

361. 在闭区间 $[a, b]$ 上可以作出可数个两两不相交的完备的无处稠密集，其和的测度为 $b-a$. 我们在线段 $[0, 1]$ 上引出相应的构造.

首先，在线段 $[0, 1]$ 上作一测度为 $\frac{1}{2}$ 的完备无处稠密集 E_1.

其次，记集 E_1 的每一个邻接区间 $(\alpha_{1,i}, \beta_{1,i})$ 中的完备无处稠密集 $E_{1,i}$，$E_{1,i}$ 的测度等于开区间 $(\alpha_{1,i}, \beta_{1,i})$ 长度的一半. 那末，$m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_{1,i}\right)=\frac{1}{2^2}$.

集 $E_2=E_1\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_{1,i}\right)$ 是完备无处稠密集（参看314题）. 它的测度等于 $\frac{3}{4}$.

再次，记集 E_2 的每一个邻接区间 $(\alpha_{2,i}, \beta_{2,i})$ 中的完备无处稠密集 $E_{2,i}$，$E_{2,i}$ 的测度等于开区间 $(\alpha_{2,i}, \beta_{2,i})$ 长度的一半. 那末，$m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_{2,i}\right)=\frac{1}{2^3}$.

集 $E_3=E_2\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_{2,i}\right)$ 是完备无处稠密集，$mE_3=1-\frac{1}{2^3}$.

继续这个过程以至无穷，我们得到下面的可数个两两没有公共点的完备无处稠密集：

$$E_1;\ E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, \cdots, E_{1,i}, \cdots;$$
$$E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, \cdots, E_{2,i}, \cdots;$$
$$E_{k,1}, E_{k,2}, \cdots, E_{k,i}, \cdots; \cdots$$

同时，

$$mE_1=\frac{1}{2};\ m\left(\bigcup_i E_{1,i}\right)=\frac{1}{2^2};\ m\left(\bigcup_i E_{2,i}\right)=\frac{1}{2^3};\cdots;$$
$$m\left(\bigcup_i E_{k,i}\right)=\frac{1}{2^{k+1}};\cdots.$$

因为，已知诸集两两不相交，那末，这些集的和之测度等于它们的测度之和. 所以，

$$m\left\{E_1\cup\left(\bigcup_i E_{1,i}\right)\cup\left(\bigcup_i E_{2,i}\right)\cup\cdots\cup\left(\bigcup_i E_{k,i}\right)\cup\cdots\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots=1.$$

这样一来，上面作出的完备无处稠密集序列 E_1 和 $E_{k,i}(k=1, 2, \cdots;\ i=1, 2, \cdots)$ 满足问题中的一切条件.

362. 存在. 作为这种集的例子，可以取 $[0, 1]\setminus E$，这里，E 是解上一题时作出的一切集之和.

363. 记 $\bigcup E_k=A$. 因为对任意 k，有 $A\supset E_k$，那末对一切 k，$mA\geqslant mE_k$ 成立. 现取任意的 $\varepsilon>0$，找这样的 k_0，使 $mE_{k_0}>1-\varepsilon$；那末，$mA\geqslant mE_{k_0}>1-\varepsilon$. 所以，对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$1-\varepsilon<mA\leqslant 1.$$

因而，mA 不可能小于 1，即是说 $mA=1$.

364. 这可从 365 题中的更一般的结果得出.

365. 按对偶原理有：$C\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)=\bigcup_{i=1}^n CA_i$，

由此，$$\bigcap_{i=1}^n A_i=C\left(\bigcup_{i=1}^n CA_i\right).$$

所以，
$$m\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)=1-m\left(\bigcup_{i=1}^n CA_i\right)\tag{1}$$

而 $$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} CA_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} mCA_i = \sum_{i=1}^{n}(1-mA_i) = n - \sum_{i=1}^{n} mA_i.$$

又因根据条件: $\sum_{i=1}^{n} mA_i > n-1$, 那末 $n - \sum_{i=1}^{n} mA_i < 1$. 因而,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} CA_i\right) < 1. \tag{2}$$

比较不等式(1)和(2)得:

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0.$$

366. 分 E 为二不相交之集的和 $E=(E\cap A)\cup(E\cap CA)$. 第一项(集 $E\cap A$)是可测的(因为集 A 的测度为零). 如果第二项(集 $E\cap CA$) 也是可测的, 那末和集 E 也是可测的, 这就同条件冲突. 因而, 集 $E\cap CA$ 不可测.

第二部分　函 数 论

第八章　映射的一般理论

367. 不正确. 集 $f(A)$ 的原像可能含集 A 之外的点. 例如, 如果 $f(x)=x^2$, $A=[0,2]\subset Ox$, 那末, $f(A)=[0,4]\subset Oy$, 而 $f^{-1}[f(A)]=[-2,2]\subset Ox$. 这里, $f^{-1}[f(A)]\neq A$.

一般地, 恒有 $f^{-1}[f(A)]\supset A$, 而等式并非经常成立.

368. 等式 $f[f^{-1}(B)]=B$ 对函数 $f(x)$ 之值集中任意集 B 都是正确的.

369. 等式 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ 对函数 $f(x)$ 的定义集中任意集 A 和 B 都是正确的.

等式 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ 并非恒正确; 但是恒有包含式 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

例: 如果 $A=\left[0,\dfrac{3}{4}\pi\right]$, $B=\left[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$, $f(x)=\sin x$, 那末

$$f(A)=[0,1],\ f(B)=[-1,1];$$

$$f(A\cap B)=f\left(\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right]\right)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right]\neq f(A)\cap f(B)=[0,1].$$

370. 对任意映射 $f(x)$ (不仅是一对一的), 这些等式中的第一个是正确的:

$$f\left(\bigcup_k A_k\right)=\bigcup_k f(A_k). \tag{1}$$

为了证明等式

$$f\left(\bigcap_k A_k\right)=\bigcap_k f(A_k), \tag{2}$$

这里, 我们证明两个方面的包含式都成立.

a) 设 $y_0\in f\left(\bigcap\limits_k A_k\right)$, 那末, 在集 $\bigcap\limits_k A_k$ 中可以找到点 x_0, 使 $y_0=f(x_0)$; $x_0\in\bigcap\limits_k A_k$ 表示对所有的 k 有 $x_0\in A_k$; 对所有的 k 有 $f(x_0)\in f(A_k)$; 即是 $y_0\in f(A_k)$ 对一切 k 成立; $y_0\in\bigcap\limits_k f(A_k)$. 所以, $f\left(\bigcap\limits_k A_k\right)\subset\bigcap\limits_k f(A_k)$. 在证明这个包含式中, 我们并没有利用映射 $y=f(x)$ 是一对一的这个条件; 因而,

这个包含式对任意映射 $f(x)$ 成立.

б) 现在证明相反的包含式. 设 $y_0\in\bigcap_k f(A_k)$. 那末, $y_0\in f(A_k)$, 对任意 k 成立. 因为映射 $y=f(x)$ 是一对一的, 那末存在一点 x_0(且仅仅一点), 使 $f(x_0)=y_0$. 即是说, 这个点 x_0 属于所有的 A_k: $x_0\in A_k$, 对任意的 k 成立; $x_0\in\bigcap_k A_k$. 所以, $f(x_0)\in f\left(\bigcap_k A_k\right)$, 即是, $y_0\in f\left(\bigcap_k A_k\right)$. 所以, $\bigcap_k f(A_k)\subset f\left(\bigcap_k A_k\right)$.

现在合并 a) 和 б) 中得到的结果, 我们得到等式(2).

利用公式(1)和(2), 对任意一对一的映射 $f(x)$, 容易证明等式 (3):

$$f(\underline{\lim}A_k)=\underline{\lim}f(A_k) \tag{3}$$

对此, 只要回忆一下下极限的定义就够了:

$$f(\underline{\lim}\,A_k)=f\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}f\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\right\}$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}f(A_k)=\underline{\lim}f(A_k).$$

类似地证明等式:

$$f(\overline{\lim}A_k)=\overline{\lim}f(A_k). \tag{4}$$

371. 对任意映射 $f(x)$, 等式(1)是正确的. 如果映射 $f(x)$ 不是一对一的, 等式 (2), (3), (4) 不再是正确的.

372. 等式 $f(R\backslash A)=f(R)\backslash f(A)$ 仅仅对一对一的映射 $f(x)$ 为真. 如果映射不是一对一的, 那末, 仅有包含式成立: $f(R\backslash A)\supset f(R)\backslash f(A)$. 例如, 如果, $f(x)=x^2$, $R=(-\infty,+\infty)$, $A=[0,+\infty)$, 那末, $f(R\backslash A)=f\{(-\infty,0)\}=(0,+\infty)$. 因而, $f(R\backslash A)\supset f(R)\backslash f(A)$; 但是, 这里等式是不成立的 (在这时, $f(R)\backslash f(A)=\varnothing$).

373. 对任意映射 $f(x)$ (对函数 $f(x)$ 的值集中任意集 A 和 B), 所给出的两个等式都是正确的.

374. 等式 $f^{-1}(L\backslash A)=f^{-1}(L)\backslash f^{-1}(A)$ 恒成立(对任意映射).

375. 所给出的等式恒成立.

第九章　欧氏空间中的连续函数

376. 设 $y=f(x)$ 是有界闭集 E 上的连续函数.

如果函数在有界闭集 E 上是连续的，那末它在 E 上是有界的. 因而，$f(E)$ 是有界集. 我们证明它是闭的.

设 η 是集 $f(E)$ 的极限点, $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 是 $f(E)$ 中收敛于 η 的点序列. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是 E 中使 $f(x_n)=y_n$ 的点. 因为 E 是有界的集，那末从序列 $\{x_n\}$ 中可以取出收敛子序列 $\{x_{n_i}\}$; 因为 E 是闭的，那末序列 $\{x_{n_i}\}$ 的极限属于 E. 设 $\lim x_{n_i}=\zeta\in E$. 按条件，函数 $f(x)$ 在集 E 上连续，特别，它在点 ζ 处相对于集 E 连续，所以，$f(\zeta)=\lim\limits_{x_{n_i}\to\zeta} f(x_{n_i})=\lim y_{n_i}=\eta$（这里，我们已注意到，如果序列 y_n 收敛于 η，那末它的子序列 y_{n_i} 也收敛于 η）. 所以，$\eta=f(\zeta)$，即 $\eta\in f(E)$. 这即是说，集 $f(E)$ 的任意极限点属于这个集，因而，$f(E)$ 是闭的.

377. 例：设 $f(x)=e^x$，这个函数是连续的，特别在闭集 $(-\infty, 0]$ 上连续. 但是，这个集的连续映象集 $(0, 1]$ 是非闭的. 另外一例：设 $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $E=(-\infty, +\infty)$, $f(E)=\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. 集 E 是闭的，而 $f(E)$ 非闭.

378. 设函数 $y=f(x)$ 是定义在闭集 E 上的连续函数. 如果 E 有界，那末，$f(E)$ 是闭的且有界（参看 376 题），这是 F_σ 型集的特殊情况. 现设 E 无界，我们将它表为有界闭集之和的形式，例如，用下面的方法：$E=\bigcup\limits_n E_n$，这里，$E_n=E\cap[-n, n]$. 那末，$f(E)=\bigcup\limits_n f(E_n)$（参看 369 题和 370 题）. 而 $f(E_n)$ 对任意的 n 都是闭集，因而，$f(E)$ 是可数个闭集之和集，即是说，$f(E)$ 是 F_σ 型集.

379. 设 $y=f(x)$ 是定义在开集 E 上的连续函数. 因为，一切开集都是 F_σ 型集，那末，$E=\bigcup\limits_n A_n$，这里，A_n 是闭集；所以，$f(E)=f\left(\bigcup\limits_n A_n\right)=\bigcup\limits_n f(A_n)$. 因为，每个 $f(A_n)$ 是 F_σ 型集（参看上题），那末，诸集 $f(A_n)$ 之和也是 F_σ 型集. 所以，$f(E)$ 是 F_σ 型集.

下面说明开集的连续像集不恒是开集. 例：设 $f(x)=\sin x$, $E=(0, 2\pi)$. 那末 $f(E)=[-1, 1]$，即 $f(E)$ 不是开集.

380. 设 $y=f(x)$ 是定义在整个 Ox 轴上的连续函数，而 F 是 Oy 轴上的任意闭集. 又设 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是 $f^{-1}(F)$ 中点组成的收敛序列. 我们证明，如果 $\zeta=\lim x_n$，那末 $\zeta \in f^{-1}(F)$.

因为，函数 $f(x)$ 在 Ox 上各处连续，那末，特别它在点 ζ 处连续；所以

$$f(\zeta)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} y_n,$$

这里，$y_n=f(x_n)$，$y_n \in F$. 即是说，在轴 Oy 上的点 $f(\zeta)$ 是 F 中点序列 y_n 的极限点. 因为，F 是闭的（根据条件），所以，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n \in F$，即 $f(\zeta)\in F$，因而，$\zeta \in f^{-1}(F)$.

所以，$f^{-1}(F)$ 中任意收敛的点序列的极限都属于 $f^{-1}(F)$，即是说，集 $f^{-1}(F)$ 是闭的.

381. 设函数 $y=f(x)$ 在整个数轴上连续，而 G 是 Oy 轴上的任意开集. 又设 $x_0 \in f^{-1}(G)$，$y_0=f(x_0)\in G$. 作一邻域 $V(y_0)$，使含于 G 中；设这个邻域是 $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$. 由函数在点 x_0 处的连续性，存在这样的 $\delta>0$，对一切 x：$x_0-\delta<x<x_0+\delta$，函数 $f(x)$ 之值满足不等式 $|f(x)-y_0|<\varepsilon$，即对一切这样的值 x，有 $f(x)\in V(y_0)$. 因而，一切 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 都在 $f^{-1}(G)$ 中：

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset f^{-1}(G).$$

这样一来，点 x_0 的某一邻域与 $x_0 \in f^{-1}(G)$ 一起全含在集 $f^{-1}(G)$ 中. 即是说，$f^{-1}(G)$ 是开集.

382. 这个结果可以从 380 和 381 题，以及集之和的原像等于它们的原像之和，而集之交的原像等于原像之交（参看 375 题）而得出来.

383. 可能. 例：a) $f(x)\equiv c$，这里有界的单点集 $\{c\}$ 的原像是整个数轴；б) $f(x)=\sin x$，这里闭区间 $[-1, 1]$ 的原像是整个 Ox 轴.

384. 条件的必要性在 381 题中已得到证明了. 我们证明所给条件对函数 $y=f(x)$ 的连续性也是充分的.

设对函数 $y=f(x)$，一切开区间 $a<y<b$ 的原像都是开集. 我们证明，它在任意点 x_0 处连续. 为此，作点 $y_0=f(x_0)$ 的任意邻域 $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$，该邻域的原像是某一开集 G，且 $x_0\in G$.

设 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 是含于 G 中的，点 x_0 的一邻域. 那末，对一切 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$，函数 $f(x)$ 之值落在预先给定的点 y_0 的 ε-邻域中；而这即是说，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

因为，x_0 是 Ox 轴上的任意一点，所以函数 $y=f(x)$ 对一切 x 连续.

385. 这个问题可以归结为上题：如果 $f^{-1}(y\geqslant b)$ 是闭的且 $f^{-1}(y\leqslant a)$ 也是闭的，那末，$f^{-1}(a<y<b)$是开集. 为了证明这一点，只须注意，开区间(a, b)是集$(-\infty, a]\cup[b, +\infty)$的余集，根据条件，这个集的原像是闭的，因而，余集的原像(即开区间(a, b)的原像)是开的(参看 374 题).

所以，一切开区间的原像是开的. 那末，根据上题的解，函数 $y=f(x)$ 是连续的.

386. 设函数 $y=f(x)$ 在数轴上各处有定义，且仅仅取整数值. 并设 x_0 是这个函数的连续点且 $f(x_0)=n_0$；我们证明，存在一邻域 $V(x_0)$，在 $V(x_0)$ 中一切点都是连续点.

作点 x_0 的这样的邻域 $V(x_0)$，使对一切 $x\in V(x_0)$ 有 $f(x_0)-\frac{1}{2}<f(x)<f(x_0)+\frac{1}{2}$ 或者 $n_0-\frac{1}{2}<f(x)<n_0+\frac{1}{2}$. 而按条件，函数仅仅取整数值；即是说，在这个邻域中恒有 $f(x)\equiv n_0$. 所以，在邻域 $V(x_0)$ 中的一切点，函数是常数，由此得出，它在所有这些点处都是连续的.

所以，如果 $x_0\in E$，这里 E 是函数 $f(x)$ 的连续点集 那末，这点的某一邻域 $V(x_0)$ 也含在 E 中；而这即是说 E 是开集.

387. 类似事实的证明，可参看 174 题的解.

388. 不充分. 例：函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0\\ 0, & \text{当 } x=0\end{cases}$$

在整个数轴上具有达布性质(特别在线段$[-1, 1]$上)，但它在点 $x=0$ 处间断.

同时可以证明，如果函数具有达布性质，那末，它的间断点只可能是第二类间断点.

389. 有定理成立：《如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上具有达布性质且对任意一点 y_0，线段$[a, b]$上一切满足 $f(x)=y_0$ 的点 x 组成之集是闭的，那末函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上连续》. 我们证明这个定理. 设 ζ 是线段 $[a, b]$ 的任一内点(对这个线段的边界点，证明是类似的). 且设 ζ 是函数 $f(x)$ 的间断点. 那末，函数在这点的振幅是正的(设 $\omega(f, \zeta)=c>0$)，而在此情况下，在点 ζ 的任意邻域中，函数 $f(x)$的振幅大于或等于 c. 作 ζ 的任一邻域 $V_\delta(\zeta)$；其中可以找到点 $\bar{x}$，在 $\bar{x}$ 处函数值与 $f(\zeta)$ 之差不小于 c. 这里有两种可能：

或者 $f(\bar{x}) \geqslant f(\zeta)+c$, 那末, 由达布性质, 在邻域 $V_\delta(\zeta)$ 中可以找到点 x, 这里 $f(x)=f(\zeta)+c$; 或者 $f(\bar{x}) \leqslant f(\zeta)-c$, 那末, 在邻域 $V_\delta(\zeta)$ 中可以找到点 x, 这里 $f(x)=f(\zeta)-c$. 所以, 如果 ζ 是间断点, 函数在这点的振幅 $c>0$, 那末, 在点 ζ 的任意邻域中可以找到或者是这种点 x, $f(x)=f(\zeta)+c$, 或者是这种点 x, $f(x)=f(\zeta)-c$.

现在考察紧缩于点 ζ 的邻域序列 $V_{\delta_1}(\zeta)$, $V_{\delta_2}(\zeta)$, …在这些邻域的每一个中选出一点 x_i, 该点的函数值或者是 $f(\zeta)+c$, 或者是 $f(\zeta)-c$:

$$x_i \in V_{\delta_i}(\zeta), f(x_i)=f(\zeta) \pm c.$$

从这个序列 $\{x_i\}$ 中选出一子序列 $\{x_{i_k}\}$, 在它的所有点的函数 $f(x)$ 之值相同; 例如, 对一切 x_{i_k}, $f(x_{i_k})=f(\zeta)+c$. 那末, 一切点 x_{i_k} 都在点 $f(\zeta)+c$ 的原像中. 而这个原像显然非闭: 一切点 x_{i_k} 都在集 $f^{-1}\{f(\zeta)+c\}$ 中(因为, $f(x_{i_k})=f(\zeta)+c$), 而极限点 ζ 不在这个集中(因为 $f(\zeta) \neq f(\zeta)+c$)①.

这样一来, 我们得出矛盾: 如果在点 ζ 处函数间断, 那么点 $f(\zeta)+c$ 的原像为非闭集, 而这与定理的条件冲突. 因而, 函数 $f(x)$ 不可能在线段 $[a, b]$ 的任何一点间断(即函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上各处连续).

390. 设 $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_k, \cdots$ 是线段 $[a, b]$ 上的给定的可数点集, 作下面的函数:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{k}, & \text{当 } x=r_k, k=1, 2, 3, \cdots \\ 0, & \text{当 } x \neq r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots\end{cases}$$

这个函数在每个点 r_k 处间断. 事实上, 在任何邻域 $V(r_k)$ 中, 可以找到不属于已给可数集 $\{r_k\}$ 中的点, 而在这些点的函数值等于零. 所以, $\underset{V(r_k)}{\omega} f(x) \geqslant \frac{1}{k}$, 对点 r_k 的任何邻域 V 都成立. 因而, 函数在点 r_k 的振幅也 $\geqslant \frac{1}{k}$; 即是函数在点 r_k 间断.

现设 $x_0 \bar{\in} \{r_k\}$. 任给 $\varepsilon>0$, 可以找到点 x_0 这样的邻域, 该邻域不含足标 k 小于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的任何点 r_k (这样的点仅有有限个). 那末, 对一切属于这个邻域的点 x, 有不等式 $|f(x)|<\varepsilon$, 即是 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 由于 $\varepsilon>0$ 的任意性得出, 函数在点 x_0 连续.

所以, 函数在一切点 r_k 间断且在其余的点连续.

---

① ζ 是点列 x_{i_k} 的极限点, 因为, 邻域 $V_{\delta_{i_k}}(\zeta)$ 紧缩于点 ζ, 而 $x_{i_k} \in V_{\delta_{i_k}}(\zeta)$, 对一切足标 i_k 成立.

391. 因为,级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\varphi(x-x_k)$在整个数轴上一致收敛,那末,它的和在所有函数$a_k\varphi(x-x_k)$都连续的那些点连续;因而,级数的和在$x_1,x_2,\cdots$以外的一切点连续,在$x_1,x_2,\cdots$中的每一点级数的和间断.

392. 这可从定义在全直线上的任意函数的间断点集是F_σ型集得出.可数处处稠密集E的余集CE不可能是F_σ型集(参看 277 题).

393. 例: $y=(x^2-1)\chi(x)$,这里$\chi(x)$是迪里赫列函数;这样一来,

$$y=\begin{cases}x^2-1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

394. 例: $y=\chi(x)\sin\pi x$,这里$\chi(x)$是迪里赫列函数.

395. 属于康托集的邻接区间的一切点是函数$f(x)$的连续点. 康托集中的点是间断点(因为,康托集中任一点的任一邻域都有邻接区间中的点). 一切这些点都是第二类间断点.

396. 例: $y=f(x)$,这里,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10^k}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{10^k}\ \left(\text{这里}\dfrac{p}{10^k}\neq 0 \text{ 是既约分数}\right)\text{时};\\ 0, & \text{当 } x \text{ 不能表为}\dfrac{p}{10^k}\text{时};\\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

如同讨论 390 题中例子一样的方法讨论这个函数.

397. 所给的函数在康托集的邻接区间的各点连续,在康托集的各点间断.

398. 如果$\lim c_n=0$,则函数在闭区间$[0,1]$上的一切点都连续. 如果$\lim c_n\neq 0$或者序列$\{c_n\}$没有极限,则这个函数在康托集的一切点间断,在邻接区间上连续.

399. 可以取下面的等式定义的函数作为例子:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\ \left(\text{这里}\dfrac{p}{q}\neq 0 \text{ 是既约分数}\right)\text{时};\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时};\\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

可以像 390 题中的例子一样讨论这个函数.

400. 不存在(参看 392 题).

401. 例: 在 398 题中(当$c_n\to 0$)作出的函数$f(x)$同迪里赫列函数的乘

积函数:

$$F(x)=f(x)\chi(x).$$

这个函数 $F(x)$ 在康托集的一切点连续，在线段 $[0,1]$ 上不属于康托集的各个点间断.

另外的例：迪里赫列函数同下面 404 题中作出的函数的乘积函数.

402. 例：在康托集的各点等于 1，在以外各点等于零的函数.

在 397 题中作出的函数可以作为另外的一例.

403. 所给的函数，除了点 $x=0$ 外，在数轴上的所有点间断；在 $x=0$ 这一点函数连续.

404. 所给函数在线段 $[0,1]$ 的一切点连续.

405. 如果函数 $f(x)$ 在集 A 上无界，那末，等式是显然的，它的两部分都等于 $+\infty$.

当 $f(x)$ 在 A 上有界的情况下，我们证明这个等式. 设 $\sup\limits_A f(x)=M$, $\inf\limits_A f(x)=m$. 因为对任意 $\zeta\in A$, $\eta\in A$ 有 $m\leqslant f(\zeta)\leqslant M$, $M\geqslant f(\eta)\geqslant m$, 那末,

$$m-M\leqslant f(\zeta)-f(\eta)\leqslant M-m,$$

即是,

$$|f(\zeta)-f(\eta)|\leqslant M-m=\omega_A f(x).$$

由此得出,

$$\sup_A |f(\zeta)-f(\eta)|\leqslant \omega_A f(x) \tag{1}$$

为了证明相反的不等式成立，取任意的 $\varepsilon>0$，在集 A 中找这样的两点 x_1 和 x_2，使

$$f(x_1)<m+\varepsilon,\quad f(x_2)>M-\varepsilon.$$

那末,

$$|f(x_2)-f(x_1)|\geqslant f(x_2)-f(x_1)>M-m-2\varepsilon,$$

因而，$\sup\limits_A|f(\zeta)-f(\eta)|\geqslant M-m-2\varepsilon$. 由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，因此得出

$$\sup_A|f(\zeta)-f(\eta)|\geqslant M-m,$$

即是,

$$\sup_A|f(\zeta)-f(\eta)|\geqslant \omega_A f(x). \tag{2}$$

比较不等式(1)和(2)，得到要求的等式.

406. 因为对任意 $\zeta\in E$ 和 $\eta\in E$ 有不等式:

$$||f(\xi)|-|f(\eta)||\leqslant|f(\xi)-f(\eta)|,$$

那末对任意集$A\subset E$有$\underset{A}{\omega}(|f(x)|)\leqslant\underset{A}{\omega}f(x)$(参看405题)．由此得出

$$\omega(|f(x)|,x_0)\leqslant\omega(f(x),x_0).$$

而因按照条件函数$f(x)$在点x_0连续，那末，$\omega(f(x),x_0)=0$；而由已证明的不等式有$\omega(|f(x)|,x_0)=0$．这即是说，函数$|f(x)|$在点x_0也是连续的．

407. 例：在线段$[0,1]$的有理点$f(x)=1$，在这个线段的无理点$f(x)=-1$．这个函数在线段$[0,1]$的一切点间断，然而，函数$|f(x)|\equiv 1$在各处连续．

408. 这个函数在所有无理点连续，在一切有理点间断；如像讨论390题中的函数一样讨论这个函数．

409. 表E为可数个闭集之和的形式：

$$E=F_1\cup F_2\cup F_3\cup\cdots\cup F_k\cup\cdots$$

总可以认为，这个序列是增加的，即$F_1\subset F_2\subset F_3\subset\cdots$(如若相反，那末，我们用$F_1\cup F_2$代$F_2$，$F_1\cup F_2\cup F_3$代$F_3$等等；那末，新的闭集序列是增加的，这些集的和也是集E)．

现在作下面的函数列$\{f_k(x)\}$：

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10^k}, & \text{当 } x \text{ 属于集 } F_k \text{ 的有理点时；}\\[2mm] \dfrac{2}{10^k}, & \text{当 } x \text{ 属于集 } F_k \text{ 的无理点时；}\\[2mm] 0, & \text{当 } x \text{ 不属于 } F_k \text{ 的点时．}\end{cases}$$

这个函数在集F_k的一切点间断，在CF_k的一切点连续(事实上，对每个点$x_0\in CF_k$，可以作邻域$V(x_0)$，使$V(x_0)$含于CF_k中；在这个邻域中函数是常数，即是说，函数是连续的)．

现在容易作出要求的函数．可以取由$f_k(x)$组成的级数之和作为这个函数：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$$

这个级数一致收敛(因为，对一切k，$|f_k(x)|\leqslant\frac{2}{10^k}$)．在任意一点$x_0\in CE$．每个函数$f_k(x)$都是连续的：由级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$的一致收敛性得出函数$f(x)$

在这点的连续性.

为了证明 $f(x)$ 在点 $\xi\in E$ 是间断的，讨论如下：设 $\xi\in F_k$，$\xi\bar{\in} F_{k-1}$. 那末 ξ 是函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_{k-1}(x)$ 的连续点，而为 $f_k(x)$, $f_{k+1}(x)$, $\cdots$ 的间断点. 同时，函数 $f_k(x)$ 在点 ξ 的振幅大于或等于 $\frac{1}{10^k}$，其余的函数在这点的振幅之和不大于和 $\frac{2}{10^{k+1}}+\frac{2}{10^{k+2}}+\cdots=\frac{2}{9\cdot 10^k}$. [①]这样一来，和函数 $f(x)$ 在点 ξ 的振幅大于或等于 $\frac{1}{10^k}-\frac{2}{9\cdot 10^k}$. 因而，函数 $f(x)$ 在点 ξ 间断.

于是，函数 $f(x)$ 在集 E 上一切点间断，而在 CE 上各处连续.

410. 例：$f(x,y)=0$，在 y 是无理数（x 是任意的）的那些点 (x,y)；$f(x,y)=1$，在 y 是有理数（x 是任意的）的那些点 (x,y).

这个函数在任意点 (x,y) 间断，同时，如果固定 y，这个函数是常数（作为 x 的函数），因而，是 x 的连续函数.

411. 函数 $f(x,y)$ 在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 中两个坐标都是无理数的那些点连续；它在一个坐标是无理数，而另一个坐标等于零的那些点也是连续的；此外，它在点 $(0,0)$ 也连续. 在所有其余各点函数间断：两个坐标都是有理数（除点 $(0,0)$ 外）的那些点处间断，在一个坐标是非零的有理数，而另一个坐标是无理数的那些点也是间断的.

我们证明，例如，函数 $f(x,y)$ 在点 $\left(\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1}\right)$ 的间断性，这里，$\frac{p}{q}>0$, $\frac{p_1}{q_1}>0$ 是有理数. 在这点函数等于零. 在这点的任意邻域中可以找到横坐标为无理数，纵坐标为 $\frac{p_1}{q_1}$ 的点；在这样的点的函数值等于 $-\frac{1}{q_1}$. 在点 $\left(\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1}\right)$ 的任意邻域中也可以找到横坐标为 $\frac{p}{q}$，而纵坐标为无理数的点；在这些点，函数等于 $\frac{1}{q}$. 于是，在点 $\left(\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1}\right)$ 的任意邻域中，函数的振幅大于或者等于数 $\frac{1}{q}+\frac{1}{q_1}$. 因而，在点 $\left(\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1}\right)$ 的振幅是正的. 即是说，这个点是间断点.

其余各点，讨论是类似的.

412. 1) 在开区间 $(0,1)$ 的一切点，函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 是连续的，且它在

---

① 为了证明这点，需利用级数 $\sum\limits_k f_k(x)$ 的一致收敛性.

这个开区间上不一致连续；对此，取任意 $\varepsilon>0, \varepsilon<2$(例如 $\varepsilon=1$)，不管 $\delta>0$ 如何取法，在开区间$\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$(它的长度小于 δ) 上函数的振幅等于 2(因而，它超过了 ε)．这即是说，函数在$(0,1)$上不是一致连续的．

2) 一致连续．我们证明这一点．补充定义所给函数在点 0 和 1 的值：设 $f(0)=0$, $f(1)=1\cdot\sin\frac{1}{1}$, 得到的函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, \text{当 } x\neq 0,\\ 0, \text{当 } x=0\end{cases}$$

在闭区间$[0,1]$上各处连续．因此，它在这个闭区间上一致连续．

如果函数在一集上一致连续，那末，在任一它的子集上一致连续．因而，当作为闭区间$[0,1]$上一致连续的函数 $f(x)$，在开区间 $(0,1)$ 上是一致连续的．而在这个开区间上 $f(x)$ 同函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$是一致的．

3) 一致连续：对每一个 $\varepsilon>0$, 存在这样的 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, 当任意的 x' 和 x'' 合于$|x'-x''|<\delta$ 时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

4) 不一致连续．

5) 一致连续．

413. 设函数 $f(x)$ 在有界集 $E\subset H_n$ 上一致连续．我们找这样的数 $\delta>0$, 对任意满足 $\rho(x',x'')<\delta$ 的 $x'\in E$, $x''\in E$ 使 $|f(x')-f(x'')|<1$ 成立．分集 E 为有限个集 E_i, 使每个的直径小于 δ(这样分集 E 是可能的，由于这个集的有界性)．在诸集 E_i 中的每一个上，函数 $f(x)$ 的振幅不大于 1；因而，在诸 E_i 中的每一个上，这个函数有界，设 $\sup\limits_{E_i}f(x)=M_i$, $\inf\limits_{E_i}f(x)=m_i$. 取诸 M_i 中的最大者，则得到函数 $f(x)$ 在集 E 上的上界，取诸 m_i 中的最小者，则得到这个函数 $f(x)$ 在集 E 上的下界．于是，$f(x)$在集 E 上有界．

414. 在 E 上一致连续的二函数它们的和在 E 上也是一致连续的．这点可从不等式：
$|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|$.
得出．

415. 如果 E 是无界集，那末，在 E 上一致连续的二函数的积不一定是一致连续函数．例：函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=x$ 在数轴上一致连续；但是，它

们的积 $f(x)\cdot g(x)=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是一致连续的.

如果 E 是有界集，那末，在这个集上一致连续的二函数的积也是一致连续的；这可从不等式得出：

$$
\begin{aligned}
&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\
&\leqslant|f(x')g(x')-f(x')g(x'')|+|f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')|\\
&=|f(x')|\cdot|g(x')-g(x'')|+|g(x'')|\cdot|f(x')-f(x'')|\\
&\leqslant A|g(x')-g(x'')|+B\cdot|f(x')-f(x'')|,
\end{aligned}
$$

这里，$A=\sup\limits_E|f(x)|$，$B=\sup\limits_E|g(x)|$（在有界集上一致连续的函数的有界性于 413 题中得到证明）.

416. 证明：对任意 $\varepsilon>0$，可以找到这样的 N，对一切 $x\geqslant N$ 有 $|f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{4}$（这里，$b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$）. 那末，对任意点 $x_1\geqslant N$，$x_2\geqslant N$ 有不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/2$.

在闭区间 $[0, N]$ 上函数是连续的；因而，它在这个闭区间上一致连续. 存在一个这样的 $\delta>0$，对 $x'\in[0, N]$，$x''\in[0, N]$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$. 我们证明这个数 δ 适合于整个半直线 $[0, +\infty)$.

在半直线 $[0, +\infty)$ 上取合于 $|x_1-x_2|<\delta$ 的二点 x_1 和 x_2，考察 $|f(x_1)-f(x_2)|$. 如果 $x_1\in[0, N]$ 和 $x_2\in[0, N]$，那末，这个差按绝对值小于 $\frac{\varepsilon}{2}$（当然小于 ε），这个是从数 δ 的选择方法得出来的. 如果，$x_1\geqslant N$，$x_2\geqslant N$，那末，$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 最后，这些点中之一（例如，$x_1$）属于 $[0, N]$，而另一个 $x_2\geqslant N$，那末，

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(N)|+|f(N)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

于是，对任意位置上的点 x_1, x_2，从 $|x_1-x_2|<\delta$ 都能得出 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 由于数 $\varepsilon>0$ 的任意性，于是得出函数 $f(x)$ 在整个半直线 $[0, +\infty)$ 上的一致连续性.

417. 不正确. 例：函数 $y=\sin(x^2)$ 在整个数轴上连续和有界，但是，它在数轴上不一致连续. 事实上，无论取怎样小的正数 $\delta>0$，总可以找到形如 $(\sqrt{k\pi}, \sqrt{(k+1)\pi})$ 的开区间，它的长度小于 δ（因为这样区间的长度当 $k\to\infty$ 时趋于零）. 同时，函数 $y=\sin(x^2)$ 在这个开区间上的振幅等于 1. 因而，对 $\varepsilon=1$ 不存在这样的 $\delta>0$，使得在任何长度小于 δ 的开区间上，函数

的振幅小于 ε.

418. 这个函数在集 E 的一切点连续，但是在这个集上不一致连续.

419. 这个函数在集 D 的一切第一类点间断，在集 CL 的一切点连续，集 D 的一切第二类点也是连续的. 在集 CD 上函数不是一致连续的.

420. 首先证明，函数 $f(x)$ 可以在保持连续性下延拓到集 E 的闭包 $\bar{E}$ 上去. 设 x_0 是集 E 的而不在 E 中的一极限点. 由 $f(x)$ 在集 E 上的一致连续性，对任意 $\varepsilon>0$，可以找到点 x_0 的 δ-邻域，在邻域中函数的振幅小于 ε. 我们证明，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限. 设 $\{x_k\}$ 是收敛于 x_0 的 E 中的任意一序列. 考察序列 $\{f(x_k)\}$，它是基本序列；这点可以从当邻域的直径趋于零时，在点 x_0 的邻域中函数的振幅趋于零得出来. 因而，序列 $\{f(x_k)\}$ 有极限. 这个极限不依赖于收敛于 x_0 的序列 $\{x_k\}$ 的选择. 我们把求得的极限当作函数在点 x_0 的值. 从函数在点 x_0 的定义得出，它在 $x=x_0$ 的连续性.

于是，函数 $f(x)$ 在闭集 $\bar{E}$ 上有了定义（保持连续性）. 为了把这个函数延拓到整个数轴上，只要将它线性地延拓到一切邻接区间上去就够了. 用下面的方法可以办到这一点：如果邻接区间 (α,β) 是有限的，那末在其中用等式：$f(x)=f(\alpha)+\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}(f(\beta)-f(\alpha))$ 定义函数 $f(x)$ 如果邻接区间是无限的（例如，$(\alpha,+\infty)$），那末我们认为函数是常数：$f(x)\equiv f(\alpha)$. 用这种方法作出的函数是在 $(-\infty,+\infty)$ 上各处有定义且连续的，在集 E 上它与所给的函数 $f(x)$ 重合.

421. 例：函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续且有界，但是，不能将它保持连续性不变地延拓到整个直线上（甚至于在闭区间 $[0,1]$ 上也不能，因为，当 $x\to 0$ 时，这个函数没有极限）.

422. 如果函数在有界集 E 上不是一致连续的，那末它不可能保持连续性不变地延拓到整个轴上去：假如它可以延拓到整个轴上，那末它更可以延拓到 $\bar{E}$ 上. 由此，延拓函数在闭有界集 $\bar{E}$ 上是一致连续的. 而即是说，在 $\bar{E}$ 的一部分集 E 上也是一致连续的，这同假定矛盾. 于是，在有界集 E 上不一致连续的函数不可能保持连续性不变地延拓到整个轴上去.

423. 取 $\varepsilon=1$，按这个 ε 选择一个 δ（由函数 $f(x)$ 一致连续性条件）. 设 x 是任意一数，$-\infty<x<+\infty$. 用点

$$\frac{1}{n}x,\ \frac{2}{n}x,\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}x$$

分线段 $[0, x]$(当 $x>0$) 或 $[x, 0]$(当 $x<0$), 这里 n 取得来使 $\frac{1}{n}|x|<\delta\leqslant\frac{1}{n-1}|x|$. 那末,

$$|f(x)-f(0)|\leqslant\left|f(x)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right|+\left|f\left(\frac{n-1}{n}x\right)-f\left(\frac{n-2}{n}x\right)\right|$$

$$+\cdots+\left|f\left(\frac{2}{n}x\right)-f\left(\frac{1}{n}x\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{n}x\right)-f(0)\right|.$$

因为, 由于数 δ 的选择法, 不等式右边部分每一个差都小于 1, 那末,

$$|f(x)-f(0)|<n.$$

由此, $|f(x)|<f(0)+n$; 其次, 因为 $\frac{1}{n-1}|x|\geqslant\delta$, 那末, $n\leqslant\frac{|x|}{\delta}+1$; 所以,

$$|f(x)|<|f(0)|+1+\frac{1}{\delta}|x|=A|x|+B$$

这里, $A=\frac{1}{\delta}$, $B=|f(0)|+1$.

424. 直接验证公式.

425. $\chi_M(x)=\chi_{E_1}(x)\chi_{E_2}(x)\cdots\chi_{E_n}(x)$;

$$\chi_N(x)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)-\sum_{i\neq j}\chi_{E_i}(x)\chi_{E_j}(x)+\sum_{\substack{i\neq j,\, j\neq k\\ i\neq k}}\chi_{E_i}(x)\chi_{E_j}(x)\chi_{E_k}(x)$$

$$-\cdots+(-1)^{n+1}\chi_{E_1}(x)\chi_{E_2}(x)\cdots\chi_{E_n}(x).$$

426. 如果点 x_0 是集 E 的边界点, 那末, 在这点的任意邻域中, 特征函数的振幅等于 1. 因而, 函数在点 x_0 间断.

如果点 x_0 不是边界点, 那末, 它是 E 或者 CE 的内点. 因此, 可以找到点 x_0 的邻域, 在其中特征函数的振幅等于零. 因而, 在这点函数是连续的.

427. 设 x_0 为线段 $[a, b]$ 上的任意一点, 我们证明, $F(x)$ 在这点是连续的.

如果 $\varphi(x_0)>\psi(x_0)$, 那末, $\varphi(x)>\psi(x)$ 在点 x_0 的某一邻域中也成立. 于是, 在这个邻域中处处有 $F(x)=\varphi(x)$; 由 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的连续性得出 $F(x)$ 在同一点的连续性.

如果 $\varphi(x_0)<\psi(x_0)$, 则讨论是类似的.

最后, 如果 $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$. 那末, 对任意 $\varepsilon>0$, 可以找到邻域 $V(x_0)$, 在邻域中的一切点有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$, $|\psi(x)-\psi(x_0)|<\varepsilon$.

因为 $F(x_0)=\varphi(x_0)=\psi(x_0)$，那末这些不等式可以改写为：

$$F(x_0)-\varepsilon<\varphi(x)<F(x_0)+\varepsilon;$$

$$F(x_0)-\varepsilon<\psi(x)<F(x_0)+\varepsilon.$$

由此得出(因为，$F(x)=\max[\varphi(x),\psi(x)]$)，对一切 $x\in V(x_0)$ 有不等式

$$F(x_0)-\varepsilon<F(x)<F(x_0)+\varepsilon$$

这即是说(由于 $\varepsilon>0$ 的任意性)，$F(x)$ 在点 x_0 是连续的.

428. 设 x_0 是数轴上任意一点，我们证明函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 在这点的连续性. 如果 $-a<f(x_0)<a$，那末可以找到点 x_0 的一个邻域 $V(x_0)$，对其中的一切点，不等式 $-a<f(x)<a$ 也是正确的. 由此，在 $V(x_0)$ 中处处有 $[f(x)]_{-a}^{a}\equiv f(x)$. 由此得出函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 在点 x_0 的连续性.

如果 $f(x_0)>a$，那末 $f(x)>a$ 在点 x_0 的某个邻域中成立. 由此，在这个邻域中处处有 $[f(x)]_{-a}^{a}\equiv a$. 由此再次得出这个函数在点 x_0 的连续性.

如果 $f(x_0)=a$，那末在充分小的任一邻域 $V(x_0)$ 中有：

$$\sup_{x\in V(x_0)}[f(x)]_{-a}^{a}\leqslant\sup_{x\in V(x_0)}f(x);$$

$$\inf_{x\in V(x_0)}[f(x)]_{-a}^{a}=\inf_{x\in V(x_0)}f(x).$$

所以，

$$\underset{V(x_0)}{\omega}[f(x)]_{-a}^{a}\leqslant\underset{V(x_0)}{\omega}f(x).$$

将这个邻域紧缩到点 x_0，我们得：

$$\omega([f(x)]_{-a}^{a},x_0)\leqslant\omega(f(x),x_0)$$

而因函数 $f(x)$ 的连续性，$\omega(f(x),x_0)=0$. 那末，$\omega([f(x)]_{-a}^{a},x_0)=0$. 即函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 在点 x_0 连续.

对 $f(x_0)=-a$ 或 $f(x_0)<-a$ 的情况，讨论是类似的.

于是，函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 在任意点 x_0 连续.

429. 这个条件的必要性在上题中已被证明. 我们现在证明，对函数 $f(x)$ 的连续性，这个条件也是充分的.

设对任 $a>0$ 及在一切点 x，$-\infty<x<+\infty$，函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 是连续的. 如果可以在直线上找到一点 x_0，在该点函数 $f(x)$ 是间断的，设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的振幅等于 $\gamma>0$. 我们作函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$，这里 $a>|f(x_0)|+\gamma$. 那末，可以作点 x_0 的一充分小的邻域，在其中 $[f(x)]_{-a}^{a}\equiv f(x)$；由此，函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 在点 x_0 间断.

如若函数 $f(x)$ 在间断点 x_0 的振幅等于 $+\infty$，那末函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 的振幅，在点 x_0(如果 $a>|f(x_0)|$)的任意邻域中不小于 $a-|f(x_0)|$. 因而，在这

种情况下，函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 在点 x_0 间断.

于是，函数 $f(x)$ 在某一点 x_0 间断，必然引起函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 在同一点的间断(对充分大的 a).

因而，对任意 $a>0$，函数 $[f(x)]_{-a}^{a}$ 的连续性是函数 $f(x)$ 的连续性的充分条件.

430. 我们分线段$[0, 1]$为两个不相交的集：一个是在$[0, 1]$上处处稠密的F_σ 型集 A，另一个也是在$[0, 1]$上处处稠密的 G_δ 型集 B，而且它们中的每一个在任意开区间 $(\alpha, \beta)\subset[0, 1]$ 中都具连续势(这种分法的例子可以参看297题).

下面，像在409题中那样，可以作出要求的函数 $f(x)$，即是说有：设 $f(x)=\sum\limits_k f_k(x)$，这里

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10^k}, & \text{当 } x \text{ 属于集 } F_k \text{ 的有理点时；}\\[2ex] \dfrac{2}{10^k}, & \text{当 } x \text{ 属于集 } F_k \text{ 的无理点时；}\\[2ex] 0, & \text{当 } x \text{ 属于集}[0, 1]\backslash F_k \text{ 的各点时.}\end{cases}$$

其中，$F_1\subset F_2\subset F_3\subset\cdots$是增加的闭集序列，其和为集 A.

同409题证明的方法一样，函数 $f(x)$ 在集B的一切点连续，在集A的一切点间断.

431. 这个函数在集A的各点间断，在集 $E=[0, 1]\times[0, 1]\backslash A$ 的各点连续. 在集E上函数 $f(x, y)$ 不是一致连续的. 研究这个函数类似于研究397题中的函数.

432. 这个函数在闭正方形$[0, 1]\times[0, 1]$上是连续的(因而，一致连续)，研究这个函数类似于研究398题中的函数.

433. 在圆环 $0<x^2+y^2<4$ 中函数是连续的，但不一致连续. 在圆环 $1<x^2+y^2<4$ 中这个函数一致连续：事实上，它在闭圆环 $E(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 中连续，因而，一致连续. 而由函数在集E上的一致连续性知，在它的任意子集(特别在开圆环 $1<x^2+y^2<4$ 中)上，函数也是一致连续的.

434. 例:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

这里，
$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}+2x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}, \text{当 } x\neq 0,\\ 0, \text{当 } x=0.\end{cases}$$

435. 设E是已给的有界完备无处稠密集；(α_n, β_n) $(n=1, 2, 3, \cdots)$是它的邻接区间；β_0是集E的下界①，α_0是集E的上界.

用如下方法作函数$f(x)$:
$$f(x)=\begin{cases}(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2\sin\dfrac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}, \text{当 } x\in(\alpha_n, \beta_n);\\ 0, \text{当 } x\in E;\\ 0, \text{当 } x\in(-\infty, \beta_0) \text{和 } x\in(\alpha_0, +\infty).\end{cases}$$
函数$f(x)$连续且在数轴上一切点有导数；这个导数由公式确定：
$$f'(x)=\begin{cases}2(x-\alpha_n)(\beta_n-x)(\alpha_n+\beta_n-2x)\sin\dfrac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}\\ -\dfrac{2(\alpha_n+\beta_n-2x)}{(x-\alpha_n)(\beta_n-x)}\cos\dfrac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}, \text{当 } x\in(\alpha_n, \beta_n);\\ 0, \text{当 } x\in E, x\in(-\infty, \beta_0), x\in(\alpha_0, +\infty).\end{cases}$$
导数$f'(x)$在集E之外各点连续，在集E的各点间断.

436. 在线段$[0, 1]$上作一完备无处稠密的正测度集. 设(α_n, β_n) $(n=1, 2, \cdots)$是这个集的邻接区间. 那末，上题作出的函数满足一切提出的要求.

437. 不存在. 导函数$f'(x)$应该取一切中间值(即具有达布性质). 迪里赫列函数不具有这种性质.

438. 不能. 因为导函数仅可能有第二类间断点（而作为间断单调的函数只能有第一类间断）.

439. 不正确. 例：函数$f(x)=|x|$在一切点处既有右导数又有左导数，但是，不管怎样不具有达布性质.

例：
$$f'_{左}(x)=\begin{cases}-1, \text{当 } x\leqslant 0,\\ 1, \text{当 } x>0.\end{cases}$$

440. 级数之和$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{|x-x_k|}{2^k}$可以作为这种函数的一例，这里，$x_1$、$x_2$, $\cdots$, x_k, $\cdots$是集E的一切可能的点. 这个函数作为在任意线段上一致收敛的连续函数级数的和是连续的. 求$f(x)$在$x\bar{\in}E$的导数:

---

① 这里的“下界”(或“上界”)是指“下确界”(或“上确界”). (译者注)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|x+h-x_k|}{2^k}-\frac{|x-x_k|}{2^k}\right)$$

$$=\Sigma'\frac{|x+h-x_k|-|x-x_k|}{2^k h}$$

$$+\Sigma''\frac{|x+h-x_k|-|x-x_k|}{2^k h}, \tag{1}$$

这里，和数 Σ' 遍历一切合于 $|x-x_k|>|h|$ 的那种 k，而 Σ'' 是遍历其余的 k. 在第一个和数中，$x+h-x_k$ 与 $x-x_k$ 有相同的符号；所以，在这个和数中

$$\frac{|x+h-x_k|-|x-x_k|}{2^k h}=\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}.$$

第二个和数中，当 h 充分小时，可以任意小. 事实上：

$$\left|\Sigma''\frac{|x+h-x_k|-|x-x_k|}{2^k h}\right|\leqslant\Sigma''\frac{|h|}{2^k|h|}=\Sigma''\frac{1}{2^k};$$

设 N 是任意自然数，总可以选择 h 如此地小，使得只有 $k>N$ 的那种 x_k 落在邻域 $(x-|h|, x+|h|)$ 中. 那末，$\Sigma''\frac{1}{2^k}\leqslant\sum_{k>N}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^N}$. 因而，当 $h\to 0$ 时，Σ'' 趋于零.

现在，在等式(1)中，当 $h\to 0$ 时，取极限，我们得到，当 $x\neq x_k$ 时，

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}.$$

于是，$f'(x)$ 在一切点 $x\bar{\in}E$ 存在. 现在证明，不管集 E 中的哪一点，导数 $f'(x)$ 都不存在.

设 x_{k_0} 是集 E 中的任意一点. 表 $f(x)$ 为两个函数之和的形式：

$$f(x)=\frac{|x-x_{k_0}|}{2^{k_0}}+\sum_{k\neq k_0}\frac{|x-x_k|}{2^k}.$$

用证明在点 $x\bar{\in}E$ 处函数 $f(x)$ 的导数存在的哪种方法证明，函数 $\sum_{k\neq k_0}\frac{|x-x_k|}{2^k}$ 在点 x_{k_0} 有导数；而函数 $\frac{|x-x_{k_0}|}{2^{k_0}}$ 在这点却没有导数. 因而，这些函数的和(即函数 $f(x)$)在点 x_{k_0} 没有导数.

441. 在数轴上所有点连续. 证明如下：

设 ξ 是集 A 的任意一点. 那末，

$$\rho(x_1,\xi)\leqslant\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,\xi),$$

或 $\rho(x_1,\zeta)-\rho(x_2,\zeta)\leqslant\rho(x_1,x_2)$，由此得出，更有

$$\rho(x_1,A)-\rho(x_2,\zeta)\leqslant\rho(x_1,x_2) \tag{1}$$

(因为 $\rho(x_1,A)\leqslant\rho(x_1,\zeta)$).

对一切 $\zeta\in A$ 不等式(1)都成立；那末，这个不等式的左边部分表达式的上确界(关于 $\zeta\in A$ 取的)不超过数 $\rho(x_1,x_2)$：

$$\sup_{\zeta\in A}[\rho(x_1,A)-\rho(x_2,\zeta)]\leqslant\rho(x_1,x_2),$$

由此

$$\rho(x_1,A)-\inf_{\zeta\in A}\rho(x_2,\zeta)\leqslant\rho(x_1,x_2),$$

即

$$\rho(x_1,A)-\rho(x_2,A)\leqslant\rho(x_1,x_2). \tag{2}$$

在不等式(2)中互换 x_1 和 x_2 的位置，我们得

$$\rho(x_2,A)-\rho(x_1,A)\leqslant\rho(x_1,x_2). \tag{3}$$

由不等式(2)和(3)得出不等式

$$|\rho(x_1,A)-\rho(x_2,A)|\leqslant\rho(x_1,x_2)$$

对一切点 $x_1\in H_1$, $x_2\in H_1$ 都成立. 由这个不等式立刻得出，函数 $\rho(x,A)$ 在任意一点 $x\in H_1$ 是连续的(甚至在整个数轴 H_1 上还是一致连续的).

442. 可以取函数：

$$f(x)=\frac{\rho(x,F)}{\rho(x,F)+\rho(x,E)}$$

作为这样的函数. 容易看出，当 $x\in F$ 时，$f(x)=0$；当 $x\in E$ 时，$f(x)=1$；当 $x\in C[E\cup F]$时，$0<f(x)<1$. 由 $\rho(x,F)$, $\rho(x,E)$不同时为零(这是由于集 E 和 F 没有公共的接触点得出；如果有这样的点，使 $\rho(x,F)$, $\rho(x,E)$ 同时为零，那末，由集 E 和 F 的闭性，它就属于它们中的每一个. 这不可能，因为，它们之交是空的)及函数 $\rho(x,F)$, $\rho(x,E)$的连续性，得出函数 $f(x)$ 的连续性.

443. 例如，可以取下面的函数：

$$f(x)=p_1\frac{\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq1}E_i)}{\rho(x,E_1)+\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq1}E_i)}+p_2\frac{\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq2}E_i)}{\rho(x,E_2)+\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq2}E_i)}$$

$$+\cdots+p_n\frac{\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq n}E_i)}{\rho(x,E_n)+\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq n}E_i)}.$$

作为要求的函数，那末，可以直接验证，当 $x\in E_k$ 时，$f(x)=p_k$.

现在证明函数 $f(x)$ 是连续的：集 $\bigcup\limits_{i\neq 1} E_i$ 是闭的（作为有限个闭集 $E_2,\cdots,E_n$ 的和）；因而，集 E_1 和 $\bigcup\limits_{i\neq 1} E_i$ 没有公共的接触点；所以，第一个分数的分母在任何一点都不等于零；这一结果，对其余分数的分母也是正确的．那末，由函数 $\rho(x,E_1)$，$\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq 1} E_i)$，$\rho(x,E_2)$ 等等的连续性立刻得出函数 $f(x)$ 的连续性.

444. 可以用下面的方法：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k\frac{\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq k} E_i)}{\rho(x,E_k)+\rho(x,\bigcup\limits_{i\neq k} E_i)}$$

给出要求的函数.

445. 如果说，当 $x\in E_k$，对任意自然数 k 都有 $f(x)=p_k$．设 $x_0\in E_1$ 是 $\bigcup\limits_{i\neq 1} E_i$ 的接触点．那末，$f(x_0)=p_1$，同时，在点 x_0 的任意邻域中，对不管多大的 i，都可以找到 E_i 中的点，在这些点，$f(x)$ 可以充分接近于零（因为当 $i\to\infty$ 时，$p_i\to 0$）．由此，在点 x_0 的任意邻域中，函数 $f(x)$ 的振幅大于或等于 $|p_1|$．而这即是说，函数 $f(x)$ 在点 x_0 间断.

于是，如果对一切 k 当 $x\in E_k$ 时函数 $f(x)$ 取值 p_k，那末，这个函数至少在数轴上的一个点间断.

446. 对任意空间，题 441—445 的解法同对直线上的集关于这些问题的解法没有什么不同.

447. 因为，按条件 $f(x)$ 在点 x_0 关于集 D 是连续的，那末，$x_0\in D$．作为函数 $f(x)$，例如可以取函数：

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in D,\\ 0, & \text{当 } x\bar{\in} D.\end{cases}$$

448. 正确的．对这个结论的证明，只要利用海因的连续性定义就够了.

449. 不正确．由函数 $f(x,y)$ 沿着从点 (x_0,y_0) 出发的任何半直线，是连续的，还不能得出它在这点是完全连续的．我们引出一例.

用 σ 表由第一圈阿基米德螺线 $\rho=a\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 和横轴上的线段 $0\leqslant$

$x \leqslant 2\pi a$ 围成的闭区域(图 38). 设

$$f(x, y)=\begin{cases}1, \text{当 } x \in \sigma, \\ 0, \text{当 } x \bar{\in} \sigma.\end{cases}$$

这个函数关于从原点引出的任何半直线是连续的,但是,它在点(0, 0)不完全连续.

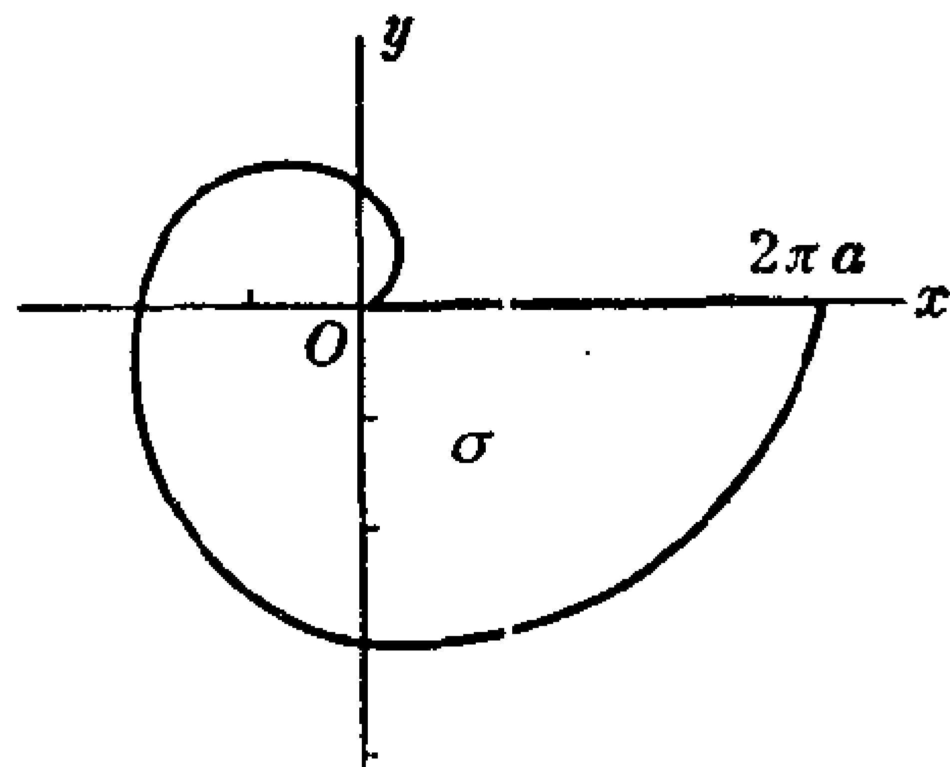


图 38

450. 这个结论不正确. 例: 设 L 是三维欧氏空间中的螺旋线:

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad z=bt;$$

设 M_0 是点$(a, 0, 0)$. 定义函数 $f(x, y, z)$:

$$f(x, y, z)=\begin{cases}0, \text{在除 } M_0 \text{ 之外的 } L \text{ 上的各点;} \\ 1, \text{在点 } M_0 \text{ 及空间 } Oxyz \text{ 中不在 } L \text{ 上的全部点.}\end{cases}$$

这个函数关于通过点 M_0 的任何平面连续;但是,它在这点不是完全连续的.

451. 这个结论不正确. 例:

$$f(x, y)=\begin{cases}1, \text{平面上坐标为}(x, 0), x>0 \text{的一切点;} \\ 0, \text{平面上其余各点(包括坐标原点}(0, 0)).\end{cases}$$

函数 $f(x, y)$ 在点(0, 0)相对于任意的阿基米德螺线连续; 但是, 它在这点不是完全连续的.

第十章 连续映射

452. 如解 376 题那样进行证明.

453. 如解 380 题那样进行证明.

454. 解法类似于 381 题.

455. 如同在解 384 题那样进行证明.

456. 证明. 如果闭集 $F \subset H_2$ 的原像是闭的 (即 $f^{-1}(F)$ 是 H_n 中的闭集),则 F 的余集(即 $H_2 \backslash F$)的原像是 H_n 中的开集:

$$f^{-1}(H_2 \backslash F)=f^{-1}(H_2) \backslash f^{-1}(F)=H_n \backslash f^{-1}(F).$$

但在 H_2 中任何的开集是某闭集的余集. 因而, 在 H_2 中任意开集的原像是开集. 特别地, 在 H_2 中任意开圆的原像是开的. 由此推出 (由解 455 题时所得之结果)映射 $y=f(x)$ 是连续的.

457. 此定理的证明用下面的方法进行. 即对于取数值的函数, 证明柯

西的连续定义与海因的连续定义等价时所用的方法.

458. 首先注意: 由于映 E 到 E_1 上的映射是一一的, 其反函数存在, 用 $x=\varphi(y)$ 表示它, 它映 E_1 到 E. 这个逆映射不一定是连续的. 用例来说明这一点. a) 我们把 Oy 轴上的一切有理数编上号, 那末可以把这种编号法看作一个映 Ox 轴上的自然数集 E 到 Oy 轴上的一切有理数集 E_1 的连续的一一映射 $r_n=f(n)$. 但是其逆映射 $n=\varphi(r_n)$ 在每一点 $r_n\in E_1$ 间断. б) 再引出另一个例子. 设 E 是 Ox 轴上的半闭区间 $[0, 2\pi)$, E_1 是 Oxy 平面上以原点为心的圆周. 令 $[0,2\pi)$ 中的每一点 x 与圆周上这样的点 M 相对应, 即它的半径向量与 Ox 轴的正向构成的角刚好是 x①(图 39). 显然这个映射 $M=f(x)$ 是连续, 且一对一的. 但其逆映射 $x=\varphi(M)$ 就在相应于 $x=0$ 的圆周上的 M_0 点处间断.

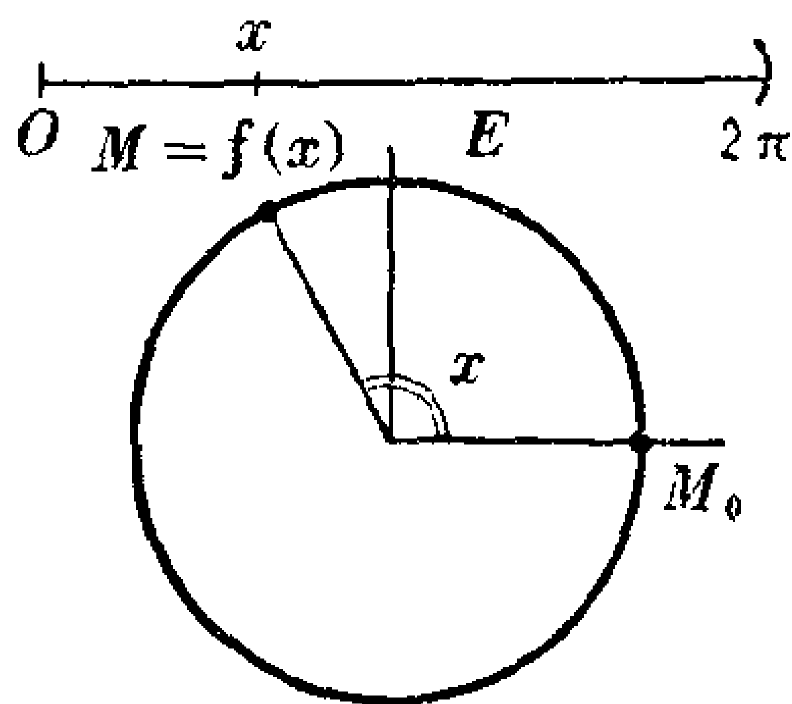


图 39

459. 设 $y=f(x)$ 是一对一地把有界闭集 E 连续映成 E_1. 那末 E_1 也是有界闭集(参阅 452 题). 用 $x=\varphi(y)$ 表示反函数. 将证明它在每一点 $y_0\in E_1$ 连续.

作 x_0(这里 $x_0=\varphi(y_0)$) 的任意的 ε-邻域 $V_\varepsilon(x_0)$. 我们要证明: 有 y_0 的邻域 $V(y_0)$ 存在, 而且对所有的 $y\in V(y_0)\cap E$ 都有 $\varphi(y)\in V_\varepsilon(x_0)$.

为此, 我们注意集 $E\backslash V_\varepsilon(x_0)$ 是有界闭集. 因此, 它的连续像 $F=f[E\backslash V_\varepsilon(x_0)]$ 是集 E_1 的有界闭子集, 同时, (由于函数 $f(x)$ 的一对一性) $y_0\bar{\in}F$. 因此, 可以作出 y_0 的不含 F 的任何一点的邻域 $V(y_0)$. 于是 $\varphi(V(y_0))$ 也不含 $\varphi(F)$ 中的任何一点, 即不含 $E\backslash V_\varepsilon(x_0)$ 中之任何一点. 即有 $\varphi(V(y_0))\subset V_\varepsilon(x_0)$.

这样一来, 有 y_0 的这样邻域 $V(y_0)$ 存在, 使对于所有的 $y\in V(y_0)\cap E_1$, $\varphi(y)\in V_\varepsilon(x_0)$ 成立. 由于邻域 $V_\varepsilon(x_0)$ 的任意性, 由此推出函数 $\varphi(y)$ 在点 y_0 相对于集 E_1 是连续的. 又因 y_0 是 E_1 中任一点, 则 $\varphi(y)$ 在集 E_1 上是连续的.

460. 不一定. 把一切自然数所成的集映成区间 $(-\infty, +\infty)$ 的一切有

① 采用弧度. (译者注)

理数所成的集，就是一例(参看 458 题之解).

再举一例. 设 E 是射线$[0, +\infty)$. 显然集 E 是无界闭集. 设 E_1 是圆心在点 C 而半径是 1 的圆周. 用下面的方法映 E 到 E_1: 点 $O\in E$ 对应于某固定点 $P_0\in E_1$; 然后, 使任一点 $x\in E$ 对应于圆周 E_1 上这样的点 P, 而要求圆心角 PCP_0 (由固定的半径 CP_0 起, 按一确定方向计算角度)等于 $4\text{arctg}x$. 这个把 E 映到 E_1 上的映射是一对一且连续的. 但逆映射在点 $P_0\in E_1$ 是不连续的.

461. 设 $y=f(x)$ 是一对一地把 E 映到 E_1 上的连续映射, 且 E 无孤立点. 假定 E_1 有孤立点, 例如 $y_0\in E_1$. 设 $x_0\in E$ 是点 y_0 的原像. 用 $V_\varepsilon(y_0)$ 表示 y_0 的不含 E_1 中其它点的邻域. 由于函数 $f(x)$ 的连续性, 就有如此的邻域 $V(x_0)$, 使 $f[V(x_0)\cap E]\subset V_\varepsilon(y_0)$. 但是, 这是不可能的: 由条件 x_0 不可能是集 E 的孤立点, 于是 $V(x_0)$ 含有无穷多 E 的点, 又由于映射 f 的一对一性, 集 $V(x_0)\cap E$ 的像也应含无穷多 E_1 的点. 这就与这个像含于 $V_\varepsilon(y_0)$ 中产生矛盾(因为 $V_\varepsilon(y_0)$ 只含 E_1 中一点).

因此, 假定 E_1 至少有一孤立点, 便得出矛盾. 即是表明集 E_1 不可能有孤立点.

当映射 $y=f(x)$ 不是一对一的, 这个命题失效. 例如, 在闭区间 $E=[0, 1]$ 上由等式 $f(x)\equiv 3$ 确定的函数, 在 E 上是连续的, 且集 E 无孤立点, 而 E_1 含有孤立点 $y=3$(它由一个且只由这点组成).

462. 不正确. 把 Ox 轴上的自然数集 E 映到 Oy 轴上一切有理数所成的集 E_1 的映射, 就是一例[参看 458 题的解中的例 a)].

463. 如果 $y=f(x)$ 是把有界闭集 E 映到 E_1 上的一对一的连续映射, 则把集 E_1 映到 E 的逆映射 $x=\varphi(y)$ 也是一对一的, 连续的(参看 459 题). 但集 E_1(无孤立点)是函数 $x=\varphi(y)$ 的定义域. 因而, 这个函数值的集合(即集 E)也没有孤立点(参看 461 题).

464. 假定存在映闭区间$[0, 1]$到闭正方形 $E_1=[0, 1]\times[0, 1]$ 的一对一的连续映射 $M=\varphi(x)$. 把闭区间$[0, 1]$ 分成两个闭区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. 在映射 $M=\varphi(x)$ 下, 某个闭集 F_1 是它们中第一个的像; 而闭集 F_2 是第二个闭区间的像. 这些集的和组成整个正方形 E_1. 这些集有唯一的公共点 $M_0=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$(由映射的一对一性推出它们没有其它的公共点). 集 F_1 和 F_2 都是无穷的(它们具有势 c, 这又是因为它们中的每一个都等势于闭区间). 因而在 F_1 中可找出这样的点 M_1, 在 F_2 中找出点 M_2, 使 M_1, M_0, M_2 三点

不在一直线上(图 40). 于是, 闭线段 $[M_1, M_2]$ 就能够表成两个不相交的非空闭集之和:

$$[M_1, M_2]=\{[M_1, M_2]\cap F_1\}\cup\{[M_1, M_2]\cap F_2\}.$$

众所周知, 这是不可能的(参看 221 题). 这样一来, 所谓"存在闭区间一对一地映到正方形的连续函数"是不正确的.

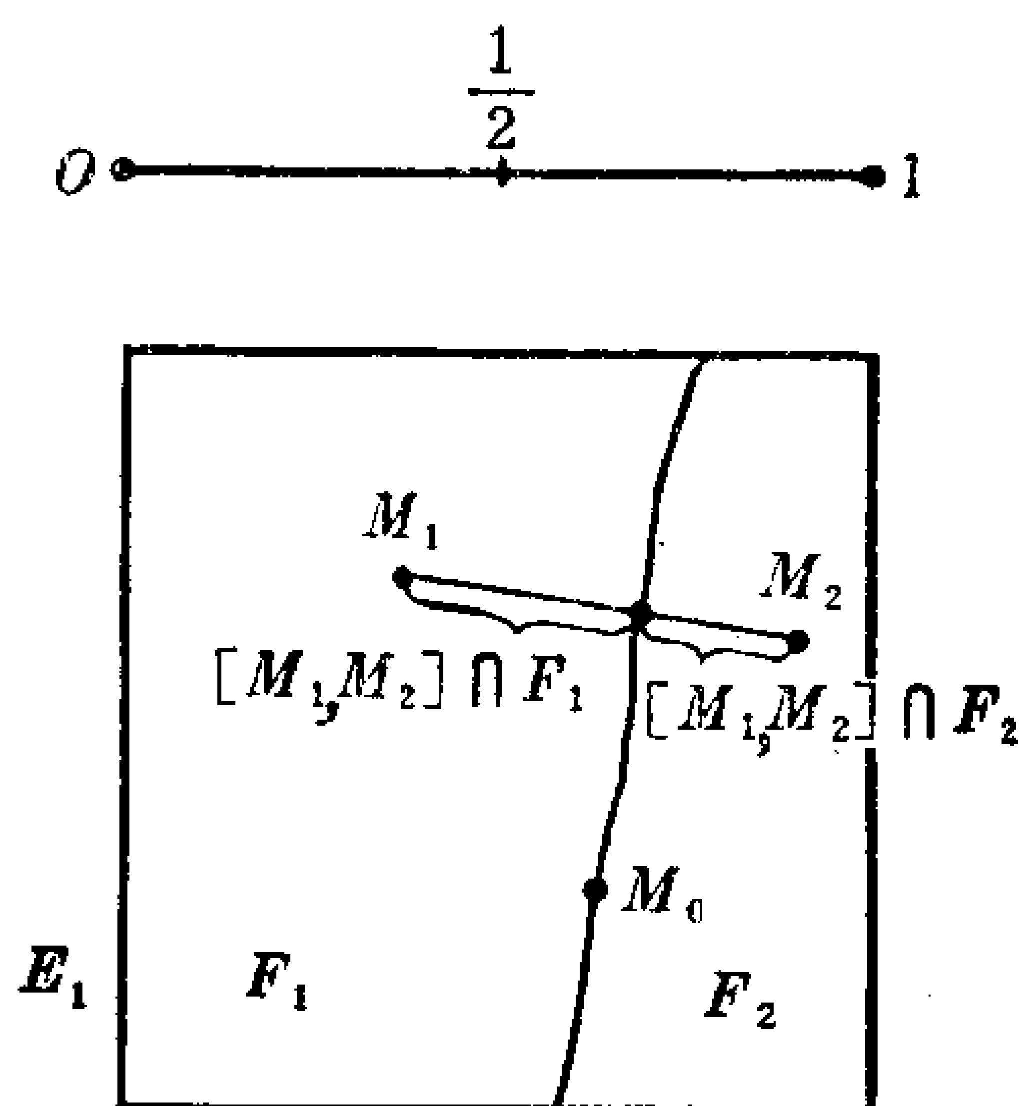


图 40

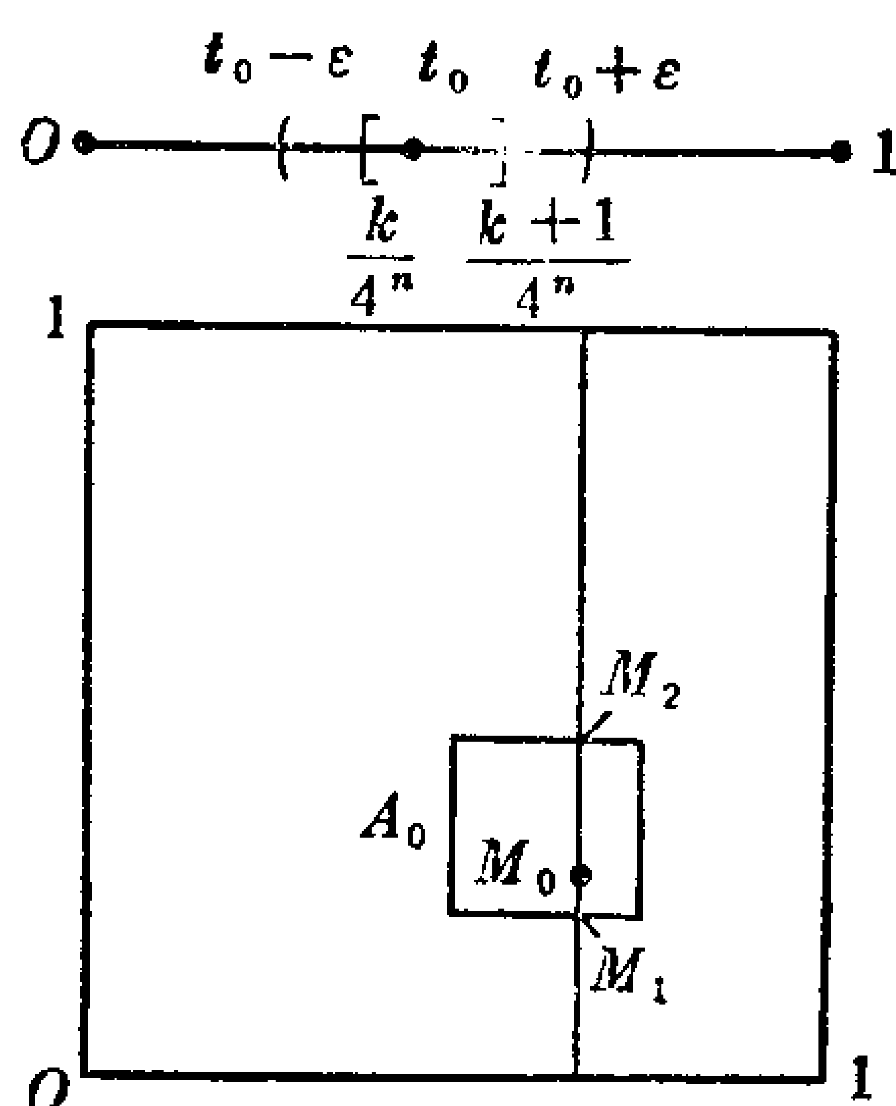


图 41

465. 设 $M=f(t)$ 就是在题设条件下所作的映闭区间 $[0, 1]$ 到正方形 $A=[0, 1]\times[0, 1]$ 的连续映射. 设 I 是 A 中的任一条铅直闭线段 ($x=x_0$, $0\leqslant y\leqslant 1$). 我们证明闭线段 I 的原像 (即 $f^{-1}(I)$) 是闭区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的完备子集.

集 $f^{-1}(I)$ 是闭的. 这是显然的. 这由任意闭集 (在连续映射下) 的原像是闭的得出. 再证明 $f^{-1}(I)$ 没有孤立点.

设 $t_0\in f^{-1}(I)$. 在 Ot 轴上作 t_0 的任一邻域: $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$. 我们将证明在其中有 $f^{-1}(I)$ 的无穷多个点. 在这个邻域内找一个形如 $\left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right]$ 的闭区间. 只要 n 充分地大和任意的 k $(0\leqslant k\leqslant 4^n)$, 这样的闭区间总是可以找得出来的. 根据映射的作法, 这个闭区间被映成其边平行坐标轴, 边长为 $\frac{1}{2^n}$ 的某个正方形 A_0.

设 $M_0=f(t_0)$, 于是 $M_0\in A_0$. 与点 M_0 同在正方形 A_0 中的, 还有闭线段 I 在 A_0 中的子集, 即垂直闭线段 M_1M_2 (图 41). 因为正方形 A_0 全部点的原像在 Ot 轴的闭区间 $\left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right]$ 上 (这个闭区间被映到整个正方形 A_0 上),

那末，特别地，闭线段 M_1M_2 的一切点的原像在这个闭区间上．即是说，在邻域 $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ 内有集 $f^{-1}(I)$ 的无穷多个点．由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，这就意味着点 t_0 是集 $f^{-1}(I)$ 的极限点．

这样一来，任意点 $t_0\in f^{-1}(I)$ 是集 $f^{-1}(I)$ 的极限点，即表明 $f^{-1}(I)$ 无孤立点．将此结果与 $f^{-1}(I)$ 是闭的对照，我们得出 $f^{-1}(I)$ 是完备集．

466. 为了把 Ot 轴上的闭区间 $[0,1]$ 分成 c（连续统的势）个两两不相交的完备集，采用下面的方法：用皮亚诺曲线把闭区间 $[0,1]$ 映射到 Oxy 面上的正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上．然后把这个正方形分成 c 个不相交的闭线段 I $(x=\text{const}; 0\leqslant y\leqslant 1)$．

这些闭线段的原像在 Ot 轴上是两两不相交的、且其和组成整个闭区间 $[0,1]$．根据上题结果，一切的集 $f^{-1}(I)$ 是完备的．

于是，闭区间 $[0,1]$ 分成了 c 个两两不相交的、形如 $f^{-1}(I)$ 的完备集（此处 I 表正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 中的一切铅直闭线段）．

467. 所构造的曲线非闭．点 $t=0$ 的像是点 $(0,0)$，点 $t=1$ 的像是点 $(1,0)$．

468. 空间皮亚诺曲线的构造法，类似于平面皮亚诺曲线的构造法．为此，要把 Ot 轴上的闭区间 $[0,1]$ 分成 8 份．然后再分成 $8^2, 8^3, \cdots$ 份．相应地，也把给出的立方体先分成 8 个一样的立方体，然后再分成 $8^2, 8^3, \cdots$ 个立方体．在每一步，闭区间 $[0,1]$ 中分出的闭线段从左向右编号；而立方体的编号是这样确定的，使相邻号码的立方体有公共的界面．

然后，令闭区间套序列 $\delta_1\supset\delta_2\supset\delta_3\supset\cdots$ 的交——点 t_0 对应于 M_0 点，此点 M_0 属于所有的与闭区间 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$ 对应的立方体 $V_1\supset V_2\supset V_3\supset\cdots$．

如同在平面的情形一样，可以证明：这个映射在任意点 t_0 是连续的，同时，在此映射下，闭区间 $[0,1]$ 的点的像充满了整个立方体：$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$．

469. 如果以倾角 α 向 Ox 轴射影，则对于集 E 的任何两点 M_1 和 M_2，以下关系式

$$\rho(P_1, P_2)\leqslant\frac{\rho(M_1, M_2)}{\sin\alpha}$$

成立．由此推出射影是集 E 的连续（甚至是一致连续）映射，而无论集 E 是怎样的．这里 P_1 是点 M_1 在 Ox 轴上的

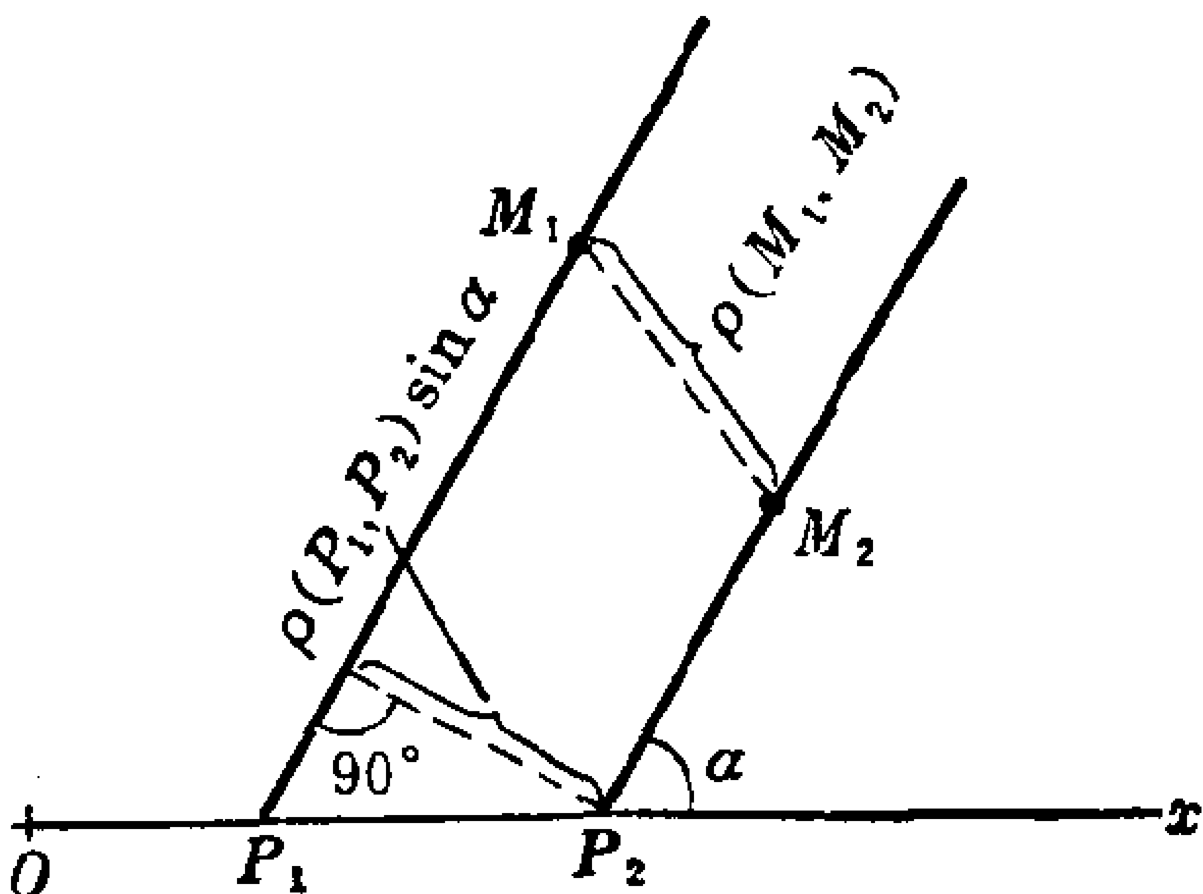


图 42

射影，P_2 是点 M_2 的射影(图 42)。

470. 是的，平面上开集的投影恒为直线上的开集。

471. 如果 E 是平面上的有界闭集，则其在轴上的投影恒为闭的(参看 452 题)。如果 E 是平面上的无界闭集，则其投影就可能是非闭的。例如，函数 $y=\operatorname{tg}x$ 的图形是闭集，而它在横轴上的垂直投影是非闭的。

472. 假定某平面集 E 在两个轴上的投影是可数集。过集 E 的每一点作第一根轴的垂线，同时又作第二根轴的垂线。这些直线仍是可数集。因而，在第一根轴上的垂线和在第二根轴上的垂线的交点所成之集只是可数集。但 E 含于这个交点集中，这意味着 E 也是可数集，这就与条件矛盾。

473. 直接验证：题中条件所指的斜角射影的每一点 z_0 表示了两个数 $x_0\in E$ 和 $y_0\in F$ 的和。相反地，所指出的形式的任意和可用这个斜角射影的某点 z_0 来表示(图 43)。

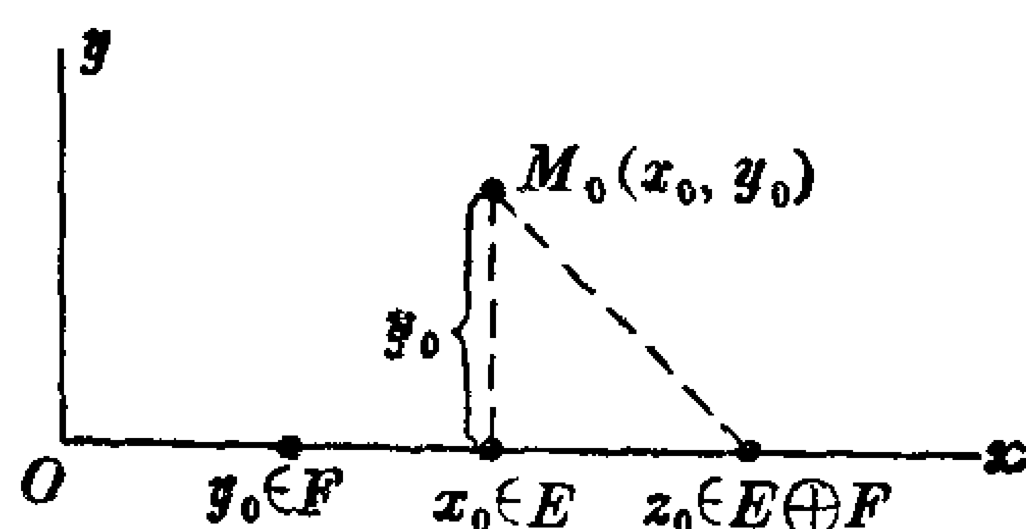


图 43

474. 先要证明：如果 E 和 F 均为有界闭集，则集 $E\times F$ 也是有界闭集。现在为了得出 $E\oplus F$，必须以 135° 为倾角，将集 $E\times F$ 向 Ox 轴射影。但射影是连续映射(参看 469 题)，而有界闭集的连续像是有界闭集。因此，集 $E\oplus F$ 是有界闭集。

475. 两个康托完备集的算术和重合于闭区间 [0, 2]。我们证明这个事实。

积 $D\times D$ 重合于《谢尔宾斯基墓垛》(参看 319 题)。过 Ox 轴上的闭区间[0, 2] 的任一点 z_0，作与 Ox 轴成 135° 倾角的直线。显然，这直线至少和第一秩正方形之一相交(图 44)。用 C_1 表示这个正方形。其次，也就是这直线至少与第二秩正方形之一(包含在 C_1 中的一个)相交，用 C_2 表示它。在其中又有这样的第三秩正方形 C_3，使这直线与它有非空的交，等等。用 u_k 表示直线和正方形 C_k 的公共部分。这些集 u_k 是有界闭集，且后一个包含在前一个之中：$u_{k+1}\subset u_k$。于是 $\bigcap\limits_k u_k$ 非空。设它含 M_0 点。这个点属于集 $D\times D$，且它的斜角射影重合于 z_0。

这样，每点 $z_0\in[0, 2]$ 属于算术和 $D\oplus D$。另一方面，直接看出，在闭区间

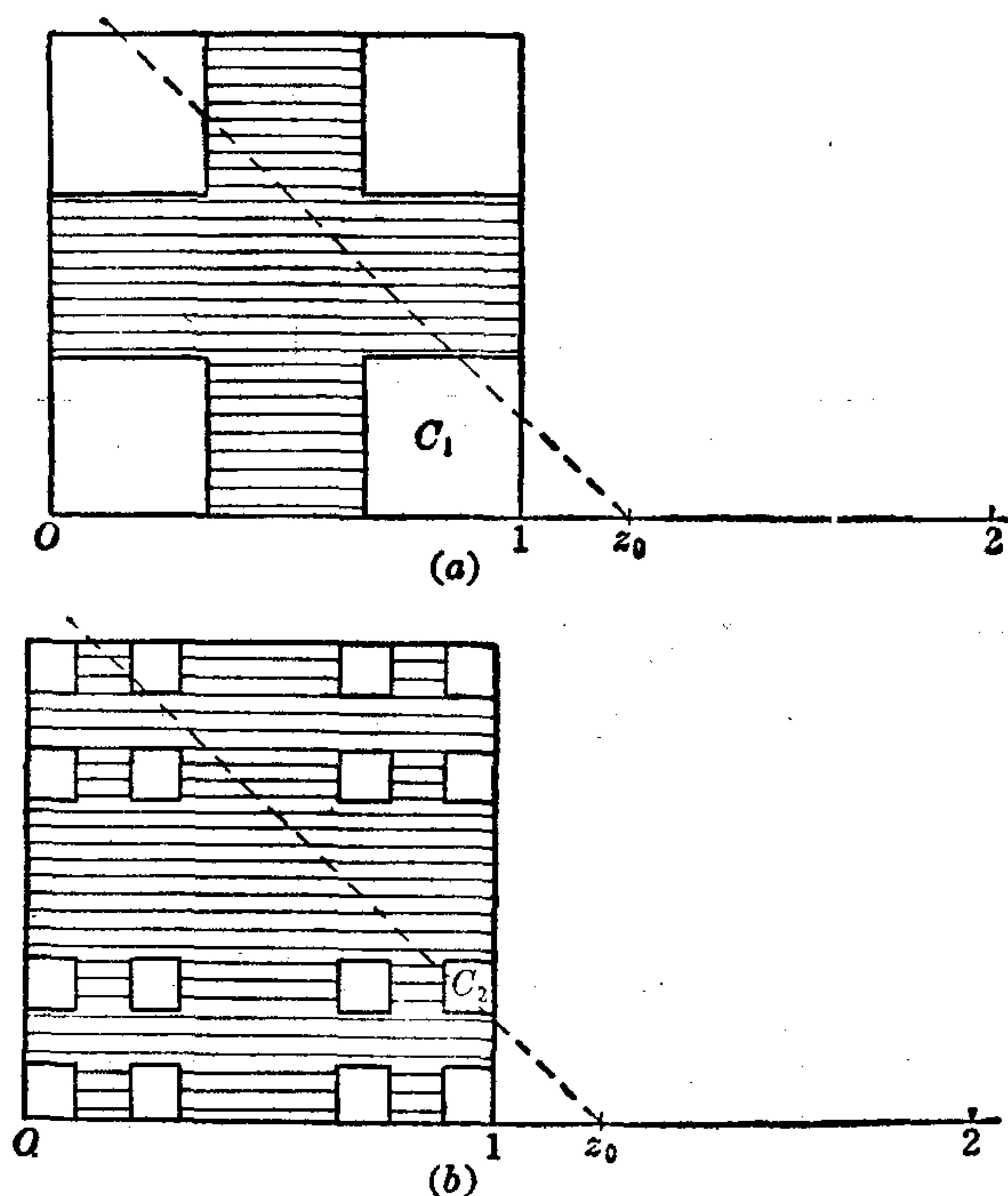


图 44

[0, 2]外的任一点，都不可能属于这个算术和，因而 $D\oplus D=[0, 2]$.

476. 设 c 是集 $A\oplus B$ 的任意一点，于是 $c=a+b$，这里 $a\in A$, $b\in B$. 因为 A 是开的，则有整个含于 A 中的邻域 $V(a)$. 那时，形如 $x+b(x\in V(a))$ 的一切点而成的集是点 $a+b$(即点 c) 的邻域. 这个集包含在 $A\oplus B$ 之中. 因而，对于任意的点 $c\in A\oplus B$ 存在一个包含在 $A\oplus B$ 中的邻域，即集 $A\oplus B$ 是开的.

477. 用下面的方法进行证明. 设 z_0 是集 $A\cup B_1$ 的任意点. 如果 $z_0\in A$ (图 45(a))，则 z_0 是点 $M_0(x_0, y_0)$ (这里 $x_0\in E$, $y_0\in F$, $x_0\geqslant y_0$) 的斜角射影，于是 $z_0=x_0-y_0=\rho(x_0, y_0)$. 如果 $z_0\in B_1$，则 $-z_0\in B$(图 45(b))，于是 $-z_0$ 是点 $N_0(x_0', y_0')$ (其中 $x_0'\in E$, $y_0'\in F$, $x_0'\leqslant y_0'$) 的射影，即 $z_0=y_0'-x_0'=\rho(x_0', y_0')$.

这样一来，集 $A\cup B_1$ 中的任意点 z_0 由形如 $\rho(x, y)$ $(x\in E,\ y\in F)$ 的数来表示，由此推出 $A\cup B_1\subset S$.

类似地验证 $S\subset A\cup B_1$.

因而有 $S=A\cup B_1$.

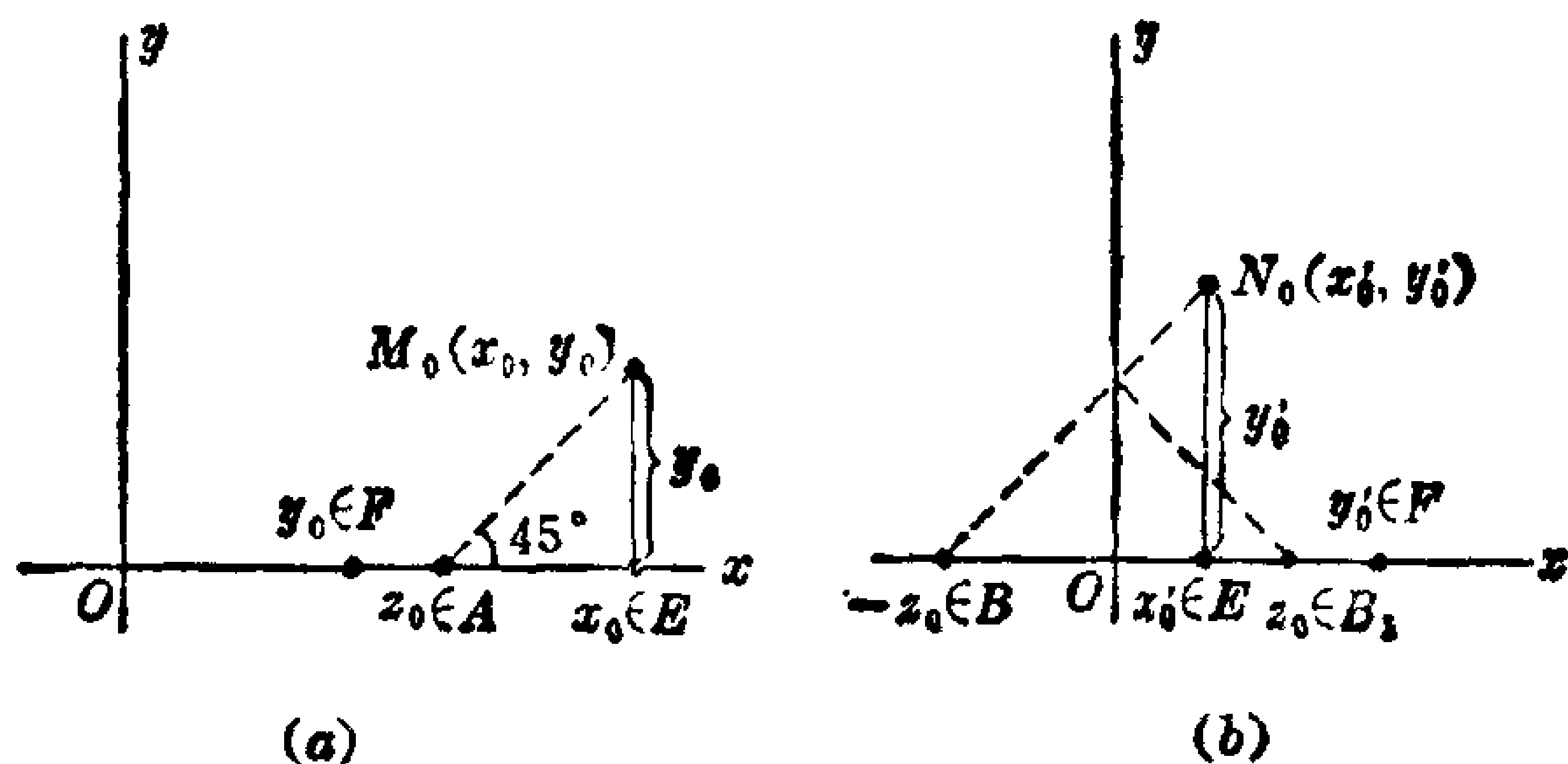


图 45

478. 如同 474 题那样进行证明.

479. 闭区间[0, 1]. 如同 475 题那样进行证明.

480. 证明类似于在解 476 题时使用过的证明.

第十一章 单调函数·有界变差函数

481. 如果 $\varphi(t)$ 是 $[a, b]$ 上的增函数, 而 $f(x)$ 是 $[\varphi(a), \varphi(b)]$ 上的单调函数, 那末, 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 在 $[a, b]$ 上是单调的(同时, 如果 f 是增函数, 那末, 复合函数也是增函数; 如果, $f(x)$ 是减函数, 那末, 复合函数也是减函数).

482. 不一定. 例: 设 $x=\varphi(t)$ 是在线段 $0\leqslant t\leqslant 2$ 上用等式:

$$\varphi(t)=\begin{cases} t, & 当\ 0\leqslant t<1; \\ t+1, & 当\ 1\leqslant t\leqslant 2 \end{cases}$$

定义的. 这个函数在 $t_0=1$ 处是间断的; 同时 $\varphi(0)=0, \varphi(2)=3$. 现在, 我们在 Ox 轴上的线段[0, 3]上定义下面的单调增函数 $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 1, & 当\ 1<x<2; \\ x-1, & 当\ 2\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$$

容易看出, 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 恒等于 t (当 $0\leqslant t\leqslant 2$); 因而, 复合函数各处连续(特别, 在点 t_0 处连续).

但是, 我们注意, 如果外函数 $f(x)$ 是严格单调的, 而内函数 $x=\varphi(t)$ 在点 t_0 处间断, 那末, 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 一定在点 t_0 处间断.

483. 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调(为确定起见, 我们认为它是

严格增的)，而且，对某一点序列 $x_n\in[a,b]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(b)$；我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$.

取任一 $\varepsilon>0$[①]，我们证明，可以找到这样的 N，当 $n>N$ 时，有 $b-\varepsilon<x_n\leqslant b$. 为此，我们计算 $f(b-\varepsilon)$. 由于函数 $f(x)$ 严格增，故 $f(b-\varepsilon)$ 小于 $f(b)$，现找这样的 N，对一切 $n>N$ 有：$f(x_n)>f(b-\varepsilon)$. 由于函数严格增，从 $f(x_n)>f(b-\varepsilon)$ 得出 $x_n>b-\varepsilon$；因而，对一切 $n>N$ 满足：$b-\varepsilon<x_n\leqslant b$ 或 $|x_n-b|<\varepsilon$. 此即表示(由数 $\varepsilon>0$ 的任意性)，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$.

484. 考察函数 $M(x)=\sup\limits_{z\in[a,x]}f(z)$. 容易看出，它是单调增的(不管是怎样的函数 $f(z)$；如果 $h>0$，因为，$[a,x]\subset[a,x+h]$，那末，

$$\sup_{z\in[a,x+h]}f(z)\geqslant\sup_{z\in[a,x]}f(z)).$$

如果函数 $f(x)$ 连续，那末 $M(x)$ 也是连续函数. 为了证明这一点，首先证明，对任意数 $a<c<d$ 有不等式：

$$\sup_{[a,d]}f(z)\leqslant\sup_{[a,c]}f(z)+\underset{[c,d]}{\omega}f(z) \tag{1}$$

这个不等式从下面的考虑得出：$\sup\limits_{[a,d]}f(z)$ 等于数 $\sup\limits_{[a,c]}f(z)$ 和 $\sup\limits_{[c,d]}f(z)$ 中之最大者. 如果最大者是 $\sup\limits_{[a,c]}f(z)$，那末，

$$\sup_{[a,d]}f(z)=\sup_{[a,c]}f(z)\leqslant\sup_{[a,c]}f(z)+\underset{[c,d]}{\omega}f(z),$$

这是因为，$\underset{[c,d]}{\omega}f(z)\geqslant0$，如果 $\sup\limits_{[a,c]}f(z)$ 和 $\sup\limits_{[c,d]}f(z)$ 中之最大者是 $\sup\limits_{[c,d]}f(z)$，那末，

$$\sup_{[a,d]}f(z)=\sup_{[c,d]}f(z)=\sup_{[a,c]}f(z)+[\sup_{[c,d]}f(z)-\sup_{[a,c]}f(z)].$$

而 $\sup\limits_{[a,c]}f(z)\geqslant f(c)\geqslant\inf\limits_{[c,d]}f(z)$；所以，

$$\sup_{[a,d]}f(z)\leqslant\sup_{[a,c]}f(z)+[\sup_{[c,d]}f(z)-\inf_{[c,d]}f(z)],$$

即

$$\sup_{[a,d]}f(z)\leqslant\sup_{[a,c]}f(z)+\underset{[c,d]}{\omega}f(z).$$

这样一来，不等式(1)对一切情况都得到了证明. 由(1)，特别得出：

$$\sup_{[a,x+h]}f(z)\leqslant\sup_{[a,x]}f(z)+\underset{[x,x+h]}{\omega}f(z),\ h>0.$$

由此得出

$$M(x+h)-M(x)\leqslant\underset{[x,x+h]}{\omega}f(z),$$

---

① 不失一般性，可以认为 $\varepsilon<b-a$.

又因为 $M(x)$ 增，那末，

$$0 \leqslant M(x+h)-M(x) \leqslant \underset{[x, x+h]}{\omega} f(z).$$

当 $h \to 0$ 时，不等式右边趋于零(因为，$f(z)$ 是连续的)，所以，$M(x+h) \to M(x)$；即是说，$M(x)$ 在点 x 是右连续的.

为了证明 $M(x)$ 在点 x 的左连续性，应用不等式(1)于点 $a<x-h<x$（这里 $h>0$）：

$$\sup_{[a, x]} f(z) \leqslant \sup_{[a, x-h]} f(z)+\underset{[x-h, x]}{\omega} f(z),$$

由此得出

$$0 \leqslant M(x)-M(x-h) \leqslant \underset{[x-h, x]}{\omega} f(z).$$

因而，当 $h \to 0$ 时，$M(x-h) \to M(x)$；即是说，$M(x)$ 在点 x 是左连续的.

于是，如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处连续，那末 $M(x)$ 在 $[a, b]$ 上也是处处连续的.

类似地可以证明函数 $m(x)$ 的单调性及连续性.

485. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数；那末，$\sup\limits_{[a, x]} f(z)=f(x)$，即 $M(x)=f(x)$ 对一切 $x \in [a, b]$ 成立.

对函数 $\widetilde{M}(x)=\sup\limits_{[a, x)} f(z)$，类似的等式并非恒成立. 我们引出一例. 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leqslant x<1; \\ x+1, & \text{当 } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

这个函数在线段 $[0,2]$ 上是增的(甚至严格增). 对它作函数 $\widetilde{M}(x)$：

$$\widetilde{M}(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x+1, & \text{当 } 1<x \leqslant 2, \end{cases}$$

这就看出，在点 $x_0=1$ 处，$f(x) \neq \widetilde{M}(x)$.

可以推广这类例子，即可以作出这样的单调函数 $f(x)$，对于它，等式 $f(x)=\widetilde{M}(x)$ 在一可数集上不成立.

486. 设函数 $y=f(x)$ 在线段 $[a, b]$ 上有定义且单调（为确定起见，设 $f(x)$ 是增的）. 假定这个函数在点 c $(a \leqslant c \leqslant b)$ 间断；那末，Oy 轴上的开区间 $(f(c-0), f(c))$；$(f(c), f(c+0))$ 中至少有一个没有函数值. 而这即是说，函数 $f(x)$ 不是把线段 $[f(a), f(b)]$ 中一切数都取作自己的值.

因而，如果函数在 $[a, b]$ 上单调，且在这个线段上取 $[f(a), f(b)]$ 中的一切数作为自己的值，那末，它在 $[a, b]$ 上连续.

487. 可能。只要定义

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in E; \\ \sup\limits_{\zeta<x} f(\zeta), & \text{当 } x\in[a,b]\setminus E,\ x>x_0; \\ \inf\limits_{E} f(\zeta), & \text{当 } x\in[a,b]\setminus E,\ x\leqslant x_0. \end{cases}$$

这里，$x_0=\inf E$.

显然，$\varphi(x)$是单调增函数；它在$[a,b]$上各处有定义，而且在集E上它与$f(x)$重合。

488. 不可能．如果$f(x)$无界，例如无上界，那末，它不能定义在点b处的值(如其不然，在E的各处有$f(x)\leqslant f(b)$)．所以，不可能保持单调性而补充在点b处的定义．如果$f(x)$无下界，那末，不可能保持单调性而补充在点a处的定义．

489. 充分性显然：如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，那末，对$f(a)$和$f(b)$之间的任一y_0，至少存在一个$x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)=y_0$(根据连续函数的中值定理)．此外，如果$f(x)$严格单调，那末，这样的点x_0仅仅只有一个(如果除x_0之外还有点$x_1\neq x_0$，使$f(x_1)=y_0$，那末，有等式$f(x_1)=f(x_0)$，这就与函数$f(x)$的严格单调性冲突)．即是说，反函数存在．

必要性．设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数且设对每个$y_0\in E_1$(这里E_1是值集)，仅仅存在一个$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)=y_0$，我们证明$f(x)$在$[a,b]$上是严格单调的．

首先注意，$f(a)\neq f(b)$(如果，$f(a)=f(b)=A$，那末，点$y=A$对应两个值$x\in[a,b]$：$x=a$和$x=b$；因而，函数$y=f(x)$没有反函数)．为确定起见，设$f(a)<f(b)$．那末，函数$f(x)$在$[a,b]$上点b处达到最大值(如若不然，例如在点$x_0\neq b$处取极大值，即$f(x_0)>f(b)$，那末，由连续函数的中值定理，在点a和x_0之间可以找到这样一点ζ，使$f(\zeta)=f(b)$(因为$f(a)<f(b)<f(x_0)$，参看图46)．那末，在线段$[a,b]$上有两个点ζ和b与同一个值y($y=f(b)$)对应；在此情况下，函数$f(x)$没有反函数.)，而在点a处达到最小值(类似可证明函数$f(x)$在点a处取最小值)．

现在证明函数$f(x)$在$[a,b]$上严格增．若非如此；那末，至少存在一对点$x_1<x_2$，使$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，这里，等式不会出现(如果$f(x_1)=f(x_2)$，那末，函数没有反函数)．即是说，$f(x_1)>f(x_2)$．于是，在线段$[a,x_1]$上存在这样的点η，使$f(\eta)=f(x_2)$(因为，$f(a)<f(x_2)<f(x_1)$，参看图47)．这又同函

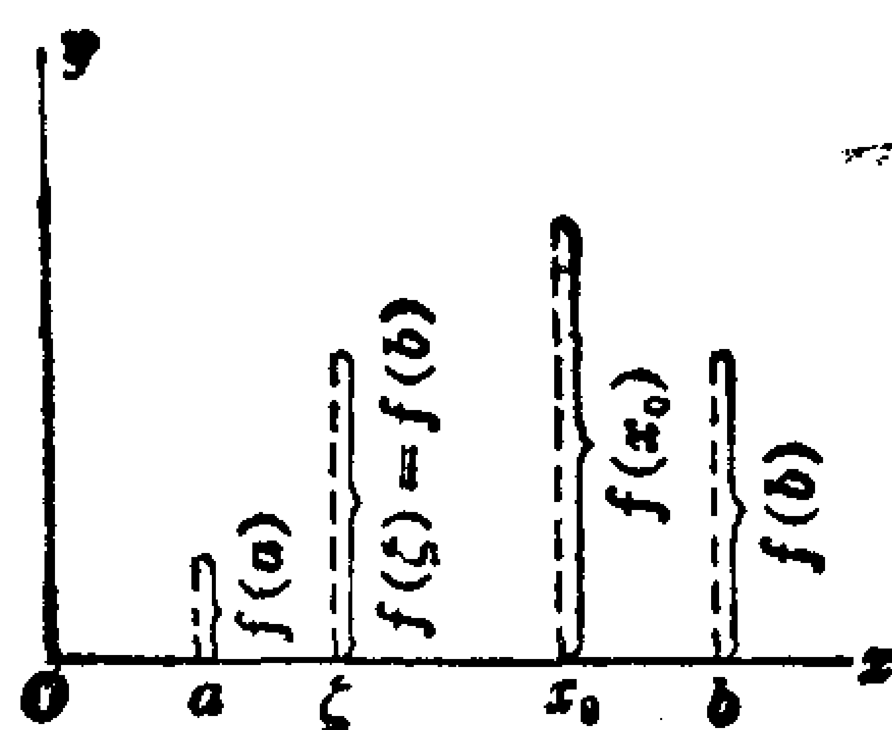


图 46

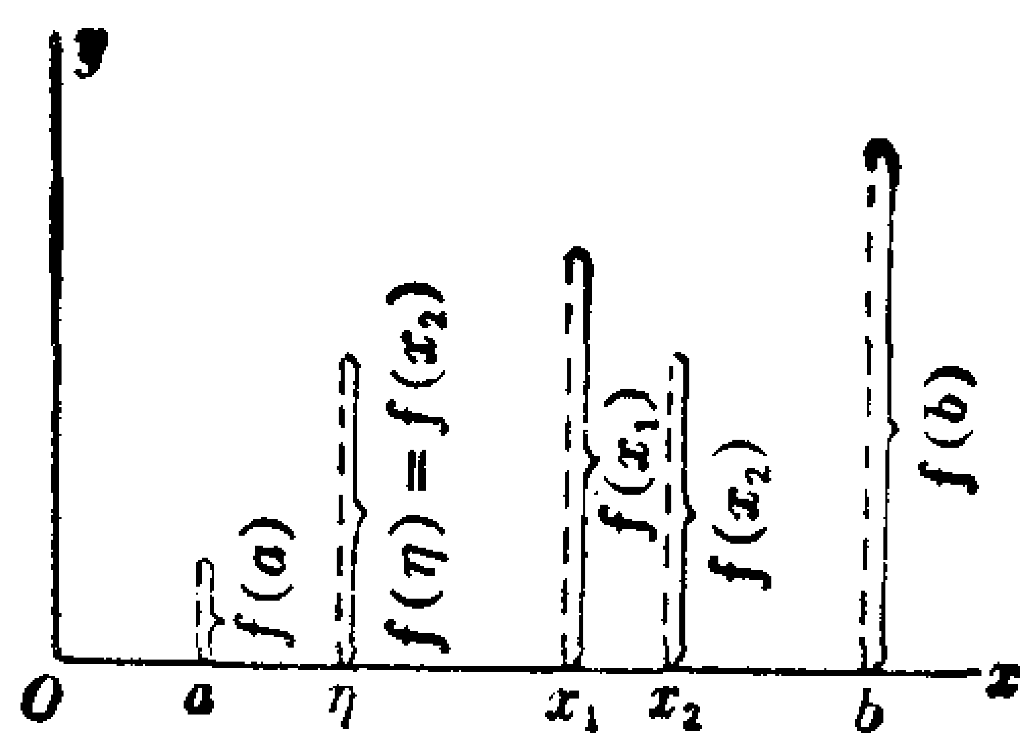


图 47

数 $f(x)$有反函数冲突. 于是, 存在一对点 $x_1<x_2$, 使 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 的结论是不正确的. 即是说, 对线段$[a, b]$上的任意点 $x_1<x_2$ 都有不等式 $f(x_1)<f(x_2)$, 即是, 函数 $f(x)$在$[a, b]$上是严格增的.

490. 如果两个函数单调增或两个函数单调减, 那末, 它们之和也单调. 但是, 如果这些函数中之一单调增, 而另一单调减, 那末, 和函数可能不单调. 例: 如果, $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=-x^2$, 那末, 这两个函数在$[0, 1]$上都单调; 但是, 它们之和 $f(x)=x+(-x^2)$ 在 $[0, 1]$ 上非单调.

491. 例: $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=x-1$; 这两个函数在$[0, 1]$上单调增; 但是, 它们之积 $f(x)=x(x-1)$ 在这个线段上非单调.

492. 设 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ 是整个数轴 R 上用任意一种方法编了号的全部有理点; 用下面方法构造一函数 $f(x)$: 对任意 $x\in R$, 令

$$f(x)=\sum_{r_k<x}\frac{1}{2^k}$$

这里, 按一切使 $r_k<x$ 的那些足标 k 求和. 显然, 这个函数对一切 x 有定义 (因为, 所给的级数总是收敛的), 且这个函数是严格增的 (因为, 对任意数 $x_1<x_2$, 至少存在一个有理数 r_{k_0}, 使 $x_1<r_{k_0}<x_2$; 所以, $f(x_2)\geqslant f(x_1)+\frac{1}{2^{k_0}}>f(x_1)$). 这个函数在每个有理点 r 间断; 事实上, 对任意的 $x>r$ 有:

$$f(x)=\sum_{r_k<x}\frac{1}{2^k}=\sum_{r_k<r}\frac{1}{2^k}+\sum_{r\leqslant r_k<x}\frac{1}{2^k};$$

设数 r 的足标等于 n; 那末, $\sum\limits_{r\leqslant r_k<x}\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2^n}$, 即是说, $f(x)>\sum\limits_{r_k<r}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^n}=$

$f(r)+\frac{1}{2^n}$；在这个不等式中取极限(当 $x\to r+0$)，我们得到[①]：$f(r+0)\geqslant f(r)+\frac{1}{2^n}$．即是说在每个点 r_n，函数 $f(x)$ 右间断且它的右方跃度 $f(r_n+0)-f(r_n)\geqslant\frac{1}{2^n}$．

我们证明，函数 $f(x)$ 在其他点没有间断点且在有理点 r_n 的跃度等于 $\frac{1}{2^n}$．这个可以从下面的考虑得出：对单调增的函数，它的上界和下界之差大于或等于一切跃度之和；而 $\sup\limits_R f(x)=\sum\limits_k\frac{1}{2^k}=1$，$\inf\limits_R f(x)=0$．因而，一切跃度之和 s 满足不等式：$s\leqslant 1$．另一方面，一切跃度之和大于或等于在诸点 r_n 右方跃度之和；所以，$s\geqslant\sum\limits_n\frac{1}{2^n}=1$．同上面得到的不等式比较得出 $s=1$．因而，在诸点 r_n 的右方跃度等于函数的全部可能的跃度(即是，在其余各点函数连续)；同时，在点 r_n 的跃度恰好等于 $\frac{1}{2^n}$(如果，这些点中至少有一点的跃度大于 $\frac{1}{2^n}$，那末，一切跃度之和大于 1)．

493. 这个问题是上一个问题的推广．构造一个在给定可数集 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 上间断的严格增函数，只要在可数集中，照上一题一样的方法进行证明．

494. 函数 $\tau(x)$ 在线段 $[0,1]$ 上的单调增性可从函数本身的构造得出．

为了证明 $\tau(x)$ 在 $[0,1]$ 上的连续性，只要注意，如果这个函数在某一点 $x_0\in[0,1]$ 间断，那末(由于函数的单调性)在线段 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上的开区间 $(\tau(x_0-0),\tau(x_0))$，$(\tau(x_0),\tau(x_0+0))$ 中至少有一个不含函数的任何一个值．但是，这是不可能的，因为，特别，一切二进位有理数是这个函数的值，而二进位有理数在线段 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上处处稠密．于是，函数 $\tau(x)$ 没有任何一个间断点；即是说，函数在闭区间 $[0,1]$ 上一切点连续．

495. 可能．上一题中构造的康托函数 $\tau(x)$ 可以作为这种函数的一个例子．这个函数在线段 $[0,1]$ 上单调连续且异于常数；同时，它的导数 $\tau'(x)$ 在 CD 上处处存在且在集 CD 的一切点的导数都等于零．因而，$\tau'(x)=0$ 在

① 符号 $f(a+0)$ 和 $f(a-0)$ 表函数 $f(x)$ 在 $x\to a+0$ 和 $x\to a-0$ 时的极限．差 $f(a+0)-f(a)$ 称为函数在点 a 的右方跃度；差 $f(a)-f(a-0)$ 称为它的左方跃度．左、右方跃度之和，即是数 $f(a+0)-f(a-0)$，称为函数 $f(x)$ 在点 a 的跃度．

[0,1]上几乎处处成立(因为, $mCD=1$).

496. 设$f(x)$在(a, b)上单调, 且在这个开区间上连续有界. 补充它在端点的定义, 令$f(a)=f(a+0), f(b)=f(b-0)$[①]. 现在, 函数在包括a, b在内的整个闭区间$[a, b]$上有定义且连续, 于是, 它在$[a, b]$上一致连续. 而由函数在$[a, b]$上的一致连续性得出它在闭区间$[a, b]$的任意子集, 特别在开区间(a, b)上的一致连续性.

497. 正确. 如果函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有界且单调, 那末它有有限极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 于是, 可以用解416题的方法证明函数在整个直线$(-\infty, +\infty)$上的一致连续性.

498. 我们用点

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$$

划分线段[0, 1], 使在每个闭区间$[x_{k-1}, x_k]$上函数的振幅小于$\varepsilon/2$. 其次, 在每个线段$[x_{k-1}, x_k]$上用下面的方法定义函数$\varphi(x)$:

$$\varphi(x_{k-1})=f(x_{k-1}),\ \varphi(x_k)=f(x_k),$$

$\varphi(x)$在$[x_{k-1}, x_k]$上单调和连续, $\varphi'(x)=0$在$[x_{k-1}, x_k]$上几乎处处成立. 我们可以像在494题中构造康托函数那样构造一个满足这些条件的函数$\varphi(x)$.

用这种方法构造出来的函数$\varphi(x)$在整个线段[0, 1]上有定义和连续且满足条件a)和б). 不难验证, 对任一$x\in[0, 1]$, 这个函数$\varphi(x)$也满足不等式$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$.

499. 我们构造一个连续函数$\varphi(x)$, 在集E上等于0, 且在E之外为正的(例如, $\varphi(x)=\rho(x, E)$, 参看441题). 其次, 记$f(x)=\int_a^x \varphi(t)dt$. 那末, 对一切$x\in[a, b]$有$f'(x)=\varphi(x)$; 特别, 对一切$x\in E$, $f'(x)=0$. 此外, $f(x)$是严格增函数; 为了验证这一点, 任取两点x_1和x_2 $(a\leqslant x_1<x_2\leqslant b)$, 在这两点之间存在一不含集$E$中的点的开区间$(\alpha, \beta)$. 那末,

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt\geqslant\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt=\varphi(c)(\beta-\alpha),$$

这里, $\alpha<c<\beta$; 因为, $c\bar{\in}E$, 那末, $\varphi(c)>0$; 因而, $f(x_2)>f(x_1)$.

500. 没有解. 设(α, β)是整个含于E中的一开区间(如果E是闭的且

---

① 当$x\to a-0$和$x\to b+0$时, 函数$f(x)$的极限存在, 因为, 这个函数在(a, b)上是单调和有界的.

不是无处稠密的，那末，这种开区间一定存在，参看206题）．如果，对某个函数 $f(x)$，它的导数在 E 上各处等于零，那末，特别，$f'(x)=0$ 在开区间 (α,β) 上各处成立，即是说，在这个开区间上函数 $f(x)$ 是常数．因而，函数 $f(x)$ 不可能在 $[a,b]$ 上严格单调．

501. 首先证明 $f(0)=0$；事实上，

$$f(0+0)=f(0)+f(0);\ f(0)=2f(0);\ f(0)=0.$$

其次，对任意整数 $k>0$ 有 $f(kx)=kf(x)$；那末，$f(1)=f\left(k\frac{1}{k}\right)=kf\left(\frac{1}{k}\right)$，由此得出 $f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{f(1)}{k}=\frac{a}{k}$（这里 $a=f(1)$）．最后，$f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=p\frac{a}{q}=a\frac{p}{q}$，即 $f(x)=ax$ 对任意有理数 $x>0$ 成立．

现设 $x>0$ 是无理数；取一递增有理数序列 $r_1<r_2<r_3<\cdots$ 使之收敛于 x．再取一递减有理数序列 $r_1'>r_2'>r_3'>\cdots$ 使之也收敛于 x．那末，由 $f(x)$ 的单调性，$f(r_k)\leqslant f(x)\leqslant f(r'_k)$ 对一切 k 成立，即 $ar_k\leqslant f(x)\leqslant ar'_k$，由此得出 $f(x)=ax$．即是说，$f(x)=ax$ 对任意正的 x（不管是有理数或是无理数）成立．

最后，如果 $x<0$，那末，$f(x)+f(-x)=f(0)$，即 $f(x)=f(0)-f(-x)=-f(-x)$；而在这时，$-x>0$；所以 $f(-x)=a(-x)$．因而，$f(x)=-f(-x)=-a(-x)=ax$．

于是，$f(x)=ax$ 对一切 x 成立．

502. 函数 $y=k\cdot f(x)+m$ 之变差等于 $|k|\cdot A$．

503. 函数的变差等于7．下面证明这一点：用点 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$ 划分线段 $[0,1]$．那末，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=|f(x_1)-f(x_0)|+\{|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\}\\&\quad+|f(x_n)-f(x_{n-1})|\\&=(1-x_1)+\{x_{n-1}-x_1\}+\{5-(1-x_{n-1})\}=5+2(x_{n-1}-x_1)<7.\end{aligned}$$

同时，和数 $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 可以任意逼近数7．所以，$\sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=7$，即是说，函数 $f(x)$ 在线段 $[0,1]$ 上的变差等于7．

504. 函数的变差等于23．

505. 为了使函数 $f(x)$ 的变差成为最小，应当假定 $f(1)=a$. 这里，a 是介于 $f(1-0)$ 和 $f(1+0)$ 之间任意一数(即 $0\leqslant a\leqslant 1$). 在此时，函数的变差等于 5.

506. 我们证明所给函数在线段[0, 1]上有有界变差. 这个函数连续且在线段[0, 1]上的一切点有导数:

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}+\pi\sin\dfrac{\pi}{x}, \text{当 } x\neq 0,\\ 0, \text{当 } x=0.\end{cases}$$

在线段[0, 1]上导数有界:

$$|f'(x)|=\left|2x\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\leqslant\left|2x\cos\frac{\pi}{x}\right|+\left|\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\leqslant 2+\pi.$$

具有有界导数的连续函数是有界变差函数(参看 510 题).

507. 为了证明函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$ 上有无界变差，只要对任意一数 $A>0$, 可以构造出线段 $\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$ 的这样一种分法，在此分法下，改变量的模数之和要超过 A 就可以了.

为此目的，用点:

$$0<\frac{2}{\pi(2k+1)}<\frac{2}{\pi(2k-1)}<\cdots<\frac{2}{3\pi}<\frac{2}{\pi}$$

分线段 $\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$, 这里 $2k+1$ 是将在后面来选定的一奇数. 对这一分法的和数 σ_k 是:

$$\begin{aligned}\sigma_k=&\left(\frac{2}{\pi(2k+1)}-0\right)+\left(\frac{2}{\pi(2k+1)}+\frac{2}{\pi(2k-1)}\right)+\left(\frac{2}{\pi(2k-1)}\right.\\&\left.+\frac{2}{\pi(2k-3)}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{5\pi}+\frac{2}{3\pi}\right)+\left(\frac{2}{3\pi}+\frac{2}{\pi}\right)\\&=\frac{2}{\pi}\left[1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{2k+1}\right]\end{aligned}$$

在方括号中是发散级数 $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{7}+\cdots+\dfrac{2}{2k+1}+\cdots$ 的 k 项部分和; 当 k 充分大时，这个和数可以任意地大. 因而，对任意 $A>0$, 可以找到这样的数 $2k+1$(因而，可以找到线段 $\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$ 的这一分法)使 $\sigma_k>A$.

而这即是说，改变量的模数之和可以任意地大，即函数 $f(x)$ 在线段

$\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$上有无界变差.

508. 如果说，$F(x)=f(ax+b)$在线段$\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$上有无界变差. 那末，对任意的自然数$N$可以用点① $-\frac{b}{a}=\zeta_0<\zeta_1<\zeta_2<\cdots<\zeta_{n-1}<\zeta_n=\frac{1-b}{a}$ 划分线段$\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$使和数$\sum_{k=1}^{n}|F(\zeta_k)-F(\zeta_{k-1})|>N$.

现用点 $\eta_k=a\zeta_k+b$:

$$0=\eta_0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_n=1$$

作为线段[0, 1]的一分法，那末，

$$\sum_{k=1}^{n}|f(\eta_k)-f(\eta_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}|f(a\zeta_k+b)-f(a\zeta_{k-1}+b)|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|F(\zeta_k)-F(\zeta_{k-1})|>N.$$

于是，如果函数$F(x)$在$\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$上有无界变差，那末，$f(x)$在[0, 1]上也有无界变差（函数 $f(x)$ 的改变量的模数之和可以大于任意的数$N>0$）. 因而，函数$F(x)$在$\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$上有有界变差.

509. 这个题的解法完全类似于上题的解法.

510. 设$|f'(x)|\leqslant A$在$[a, b]$上各处成立；那末，对$[a, b]$的任意一分法:

$$a=\zeta_0<\zeta_1<\zeta_2<\cdots<\zeta_{n-1}<\zeta_n=b$$

有（由拉格朗日（Lagrange）公式）

$$|f(\zeta_k)-f(\zeta_{k-1})|=|f'(\tau_k)(\zeta_k-\zeta_{k-1})|\leqslant A|\zeta_k-\zeta_{k-1}|.$$

这里，τ_k是ζ_{k-1}和ζ_k之间的某一点. 所以，

$$\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)-f(\zeta_{k-1})|\leqslant\sum_{k=1}^{n}A|\zeta_k-\zeta_{k-1}|=A\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k-\zeta_{k-1}|$$

$$=A(b-a).$$

于是，对线段$[a, b]$之任一分法，改变量的模数之和不超过数$A(b-a)$. 即是说，函数$f(x)$在$[a, b]$上有有界变差.

---

① 分点$\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-1}$当然依赖于$N$.

511. 如果E只有有限个边界点，那末，$\chi_E(x)$在任意开区间上有有界变差；这个结论是明显的. 如果E有无穷多个边界点，那末，$\chi_E(x)$在线段$[a, b]$上有无界变差. 我们证明这一点. 给任意一自然数N，从(a, b)中的一切边界点组成的集中可以选出N个点且将其按递增的次序排列：

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_N<b.$$

对这些点作两两不相交的邻域：$V(x_1)$，$V(x_2)$，$V(x_3)$，…，$V(x_N)$，且在这些邻域的每一个中取一对这样的点ζ_i和η_i，使$\zeta_i\in E$，$\eta_i\bar{\in} E$. 那末，

$$\bigvee_a^b \chi_E(x)\geqslant\sum_{i=1}^N|\chi_E(\eta_i)-\chi_E(\zeta_i)|=N$$

于是，函数$\chi_E(x)$在线段$[a, b]$上的变差可以大于任意预先给定的自然数N；因而，变差等于无穷.

512. 不一定. 例如：

设

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\sin k\pi[x(k+1)-1], & \text{在闭区间}\left[\dfrac{1}{k+1},\ \dfrac{1}{k}\right]\text{上，}\\ 0, & \text{在闭区间}\left[\dfrac{1}{k+1},\ \dfrac{1}{k}\right]\text{之外.}\end{cases}$$

级数$\sum\limits_k f_k(x)$在闭区间$[0, 1]$上一致收敛；在这个闭区间上，诸函数$f_k(x)$中的每一个有有界变差，但是，级数之和是$[0, 1]$上的无界变差函数.

513. 设$|f(x)-f(y)|\leqslant A|x-y|$，对一切$x\in[a, b]$，$y\in[a, b]$. 那末，对线段$[a, b]$之任意分法有：

$$\Sigma|f(\zeta_k)-f(\zeta_{k-1})|\leqslant\Sigma A|\zeta_k-\zeta_{k-1}|=A(b-a).$$

因而，函数$f(x)$在$[a, b]$上有有界变差.

514. 如果$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|^0$对线段$[a, b]$的任意点成立，那末，特别对一切$x\in[a, b]$有$|f(x)-f(a)|\leqslant A$，即$f(a)-A\leqslant f(x)\leqslant f(a)+A$，而这即是说，函数$f(x)$在$[a, b]$上有界.

相反论断的证明是显然的.

515. 取任意一对属于给定线段$[a, b]$上的点ζ和η，我们证明$f(\zeta)=f(\eta)$. 为此，划分线段$[\zeta, \eta]$为n等分，这里，n是暂时为任意的自然数：

$$\zeta=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=\eta,\ x_i-x_{i-1}=\frac{\eta-\zeta}{n}.$$

那末，

$$|f(\eta)-f(\zeta)|=|f(x_n)-f(x_0)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}A|x_i-x_{i-1}|^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}A\left|\frac{\eta-\zeta}{n}\right|^{\alpha}=A\left|\frac{\eta-\zeta}{n}\right|^{\alpha}\cdot n$$

$$=\frac{A|\eta-\zeta|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}.$$

不等式$|f(\eta)-f(\zeta)|\leqslant A\dfrac{|\eta-\zeta|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}$对任意自然数$n$成立。因而，当$n\to\infty$时也成立。注意$\alpha>1$，所以$\alpha-1>0$。我们得

$$|f(\eta)-f(\zeta)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{A|\eta-\zeta|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}=0,$$

由此得出$f(\zeta)=f(\eta)$。于是，对线段$[a,b]$的任意二点函数值是相等的，即是，在这个线段上函数$f(x)$是常数。

516. 设$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|^{\alpha}$，对任意$x_1\in[a,b]$，$x_2\in[a,b]$成立。并设$\beta<\alpha$，那末，

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|^{\alpha}=\frac{A}{|x_1-x_2|^{\beta-\alpha}}\cdot|x_1-x_2|^{\beta}$$

$$\leqslant\frac{A|x_1-x_2|^{\beta}}{(b-a)^{\beta-\alpha}}.$$

于是，对闭区间的任意二点x_1,x_2满足不等式

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant B|x_1-x_2|^{\beta},$$

这里，$B=\dfrac{A}{(b-a)^{\beta-\alpha}}$。因而，函数$f(x)$满足$\beta$阶的里普希茨条件。

517. 设$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|^{\alpha}$，对任意的$x_1\in[a,b]$，$x_2\in[a,b]$成立。为确定起见，我们认为$m>0$，取任意二数$\zeta\in\left[\dfrac{a-n}{m},\dfrac{b-n}{m}\right]$，$\eta\in\left[\dfrac{a-n}{m},\dfrac{b-n}{m}\right]$，估计差$F(\zeta)-F(\eta)$：

$$|F(\zeta)-F(\eta)|=|K|\cdot|f(m\zeta+n)-f(m\eta+n)|$$

$$\leqslant|K|\cdot A\cdot|m\zeta-m\eta|^{\alpha}=|K|\cdot Am^{\alpha}|\zeta-\eta|^{\alpha}.$$

[注意，如果ζ和η属于闭区间$\left[\dfrac{a-n}{m},\dfrac{b-n}{m}\right]$，那末，$m\zeta+n$和$m\eta+n$属于$[a,b]$；所以，对差$|f(m\zeta+n)-f(m\eta+n)|$应用里普希茨不等式是合理的]。于是，$F(x)$在相应的线段上满足具常数$|K|Am^{\alpha}$的$\alpha$阶的里普希茨条件。

518. 例：函数

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\ln x}, & \text{当 } 0<x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{当 } x=0\end{cases}$$

在闭区间$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上是连续的，且在这个闭区间上严格增(因而，它在闭区间上有有界变差). 我们证明这个函数不满足任何 $\alpha>0$ 阶的里普希茨条件. 设 α 是 0 和 1 之间的任意一个数. 我们证明，对任意 $A>0$，存在这样的二点 $x_1\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$和 $x_2\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，使 $|f(x_2)-f(x_1)|>A|x_2-x_1|^\alpha$. 取 $x_1=0$ 作为 x_1；为了选择 x_2，我们证明当 $x\to0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{|x-0|^\alpha}\to\infty$:

$$\lim_{x\to0}\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{1}{\ln x}}{x^\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{-x^{-\alpha}}{\ln x}=\lim_{x\to0}\alpha x^{-\alpha}=\infty.$$

所以，对任意 $A>0$，可以选择这样的 x_2，使$\dfrac{|f(x_2)-f(0)|}{|x_2-0|^\alpha}>A$，由此得出，$|f(x_2)-f(0)|>A|x_2-0|^\alpha$. 因而，$f(x)$ 不满足 α 阶的里普希茨条件，$0<\alpha<1$.

519. 设$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 是任意的项为单调减的正项收敛级数；并设其和等于 s. 在$[0,s]$上构造函数 $f(x)$:

$$f(x)=0,\ \text{在点 } 0,\ a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots;$$

$$f(x)=\frac{1}{n},\ \text{在点 } a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots);$$

$$f(s)=0;$$

$f(x)$在任意形如$\left[a_1+\cdots+a_{n-1},\ a_1+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{a_n}{2}\right]$，$\left[a_1+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{a_n}{2},\ a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n\right]$和$\left[0,\dfrac{a_1}{2}\right]$，$\left[\dfrac{a_1}{2},a_1\right]$的线段上是线性的(这个函数的略图参看图 48). 这个函数在闭区间$[0,s]$上连续，且在其上有无界变差，不管原先的级数 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$是怎样的级数. 为了证明变差无界这个论断，我们用点:

$$\frac{a_1}{2},\ a_1,\ a_1+\frac{a_2}{2},\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+\frac{a_3}{2},\ \cdots,\ a_1+a_2+\cdots+a_k,$$

划分线段$[0,s]$，这里，k 是任意自然数；对这一分法，计算函数的改变量的模数之和 Σ_k:

$$\Sigma_k=\left|f\left(\frac{a_1}{2}\right)-f(0)\right|+\left|f(a_1)-f\left(\frac{a_1}{2}\right)\right|+\left|f\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)-f(a_1)\right|+\cdots$$
$$+\left|f(a_1+\cdots+a_k)-f\left(a_1+\cdots+a_{k-1}+\frac{a_k}{2}\right)\right|+\left|f(s)-f(a_1+\cdots+a_k)\right|$$
$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}$$
$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right).$$

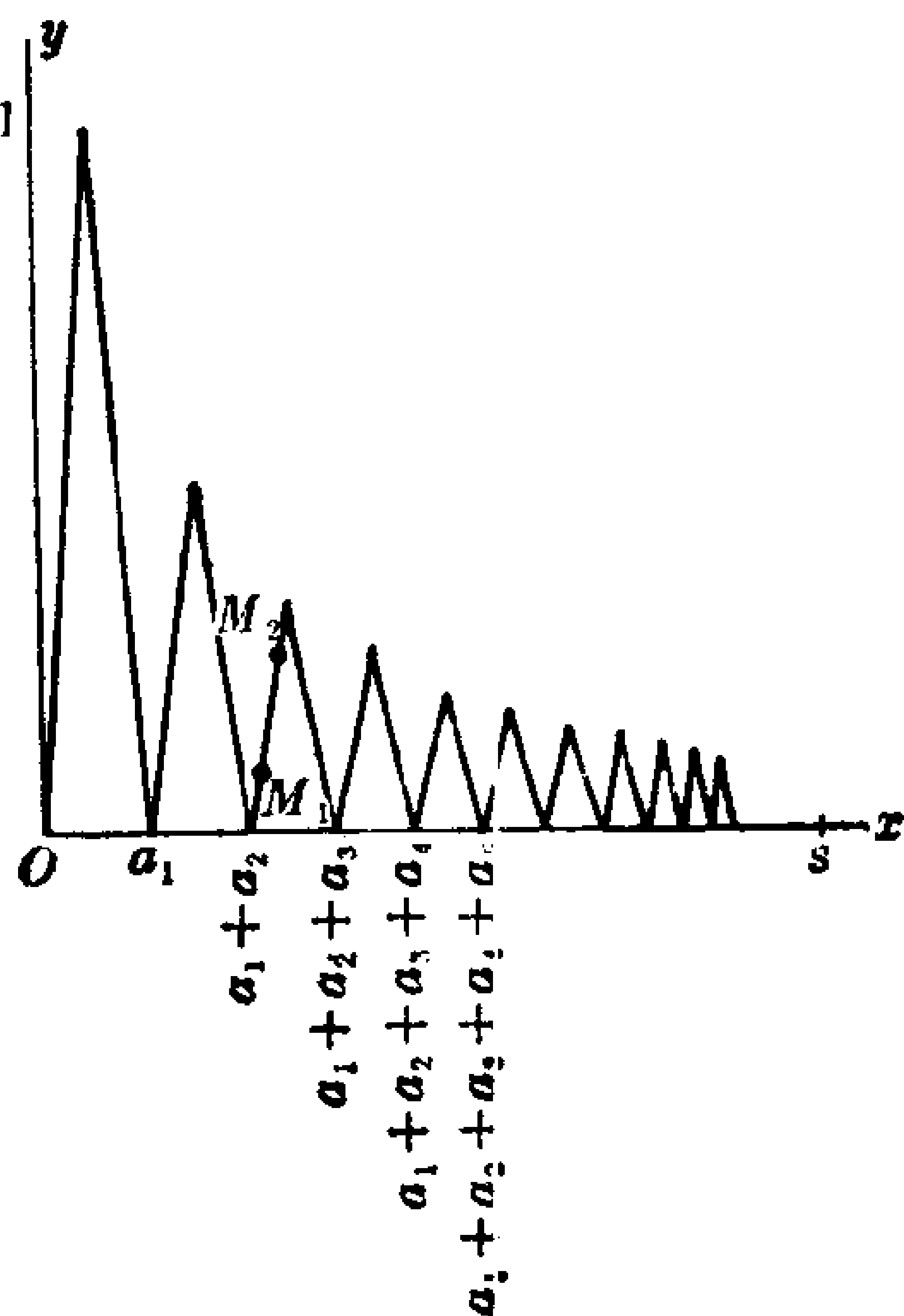


图 48

由此看出，选择充分大的k，可以使和数Σ_k任意地大. 因而，$\overset{s}{\underset{0}{V}} f(x)=\infty$.

现在选择级数$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$，使函数$f(x)$满足给定阶数的里普希茨条件. 设$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$是属于函数图形上同一线段上的两点(参看图 48). 如果，$a_1+\cdots+a_{n-1}\leqslant x_1<x_2\leqslant a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}$，那末，$|y_2-y_1|=k|x_2-x_1|$，这里$k=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{2}}=\frac{2}{na_n}$.

因而，

$$|y_2-y_1|=\frac{2}{na_n}|x_2-x_1|=\frac{2|x_2-x_1|^{1-\alpha}}{na_n}|x_2-x_1|^\alpha<\frac{2a_n^{1-\alpha}}{na_n}|x_2-x_1|^\alpha$$
$$=\frac{2}{na_n^\alpha}|x_2-x_1|^\alpha.$$

选择这样的$\{a_n\}$，使$\frac{2}{na_n^\alpha}$是有界的(对一切n). 在不破坏级数Σa_n的收敛性下，这样的级数是可以作得出来的；对此，只要取$a_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$就够了. 那末，对属于函数图形上同一线段上的任意二点x_1和x_2有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 2|x_2-x_1|^\alpha.$$

现设x_1和x_2是线段$[0, s]$上的任意二点，不在函数图形上的同一线段上，例如：

$$x_1 \in \left[a_1+\cdots+a_{k-1},\ a_1+\cdots+a_{k-1}+\frac{a_k}{2}\right];$$

$$x_2 \in \left[a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2},\ a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n\right].$$

这时，$k \leqslant n$（图 49）[①]. 通过图形上的点M_2（横坐标为x_2）引水平直线，找出它同点M_1（横坐标为x_1）所在的图形线段的交点；设这个交点是$M_2'(\xi, \eta)$. 易证$|x_2-x_1|>|\xi-x_1|$；此外，$f(x_2)=f(\xi)$. 因而，

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(\xi)-f(x_1)| \leqslant 2|\xi-x_1|^{\alpha}<2|x_2-x_1|^{\alpha}.$$

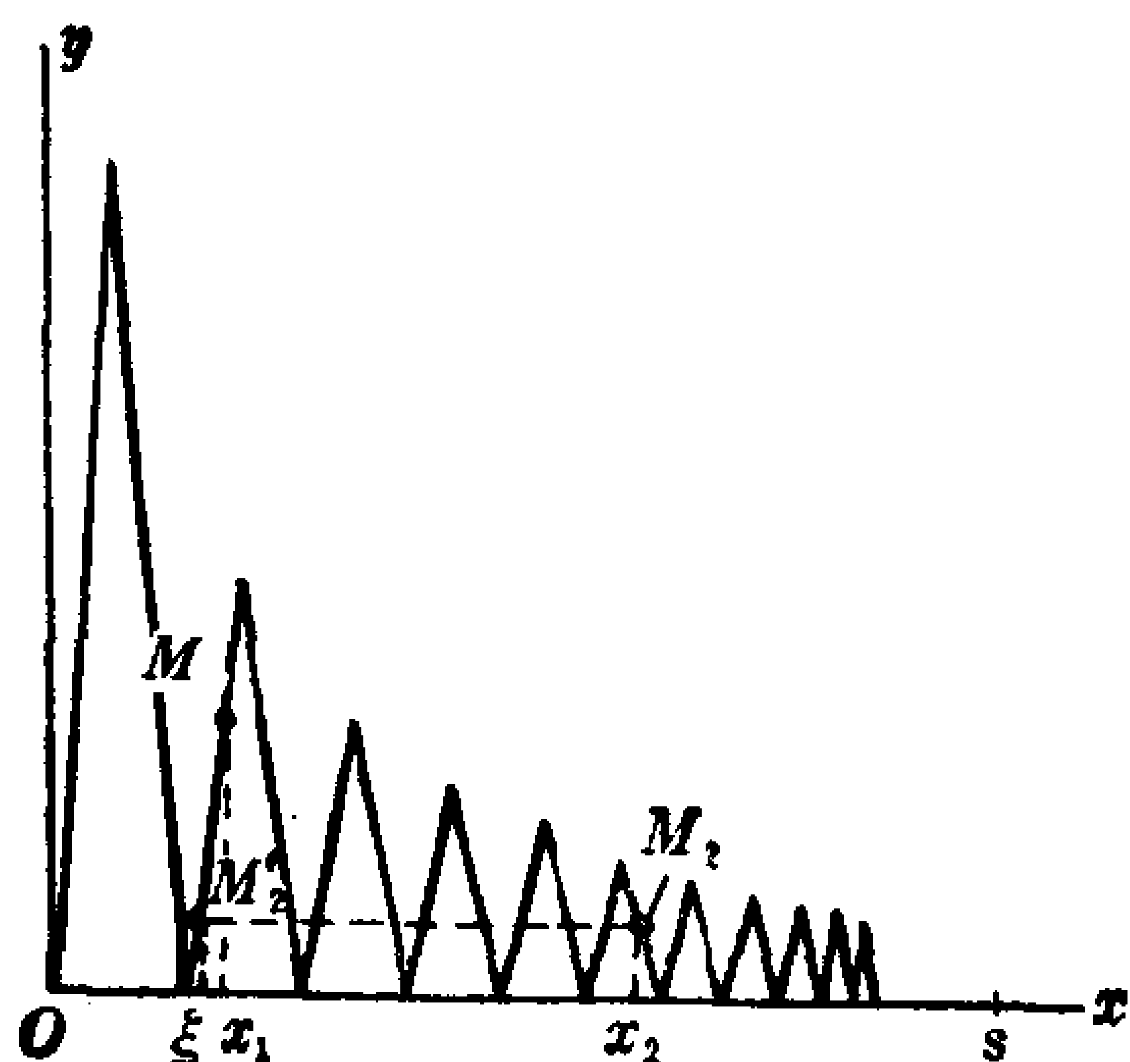


图 49

于是，不等式$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant 2|x_2-x_1|^{\alpha}$对线段$[0, s]$的任意二数都成立；即是说，函数$f(x)$在这个线段上满足$\alpha$阶的里普希茨条件.

注意，$f(x)$在线段$[0, s]$上不满足β阶的里普希茨条件，这里，$\beta>\alpha$. 这一结论可以从$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|f(b_n)-f(c_n)|}{|b_n-c_n|^{\beta}}=\infty$得出$\Big($如果，设 $b_n=a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n$，$c_n=a_1+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{a_n}{2}\Big)$；事实上，

$$\frac{|f(b_n)-f(c_n)|}{|b_n-c_n|^{\beta}}=\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{a_n}{2}\right)^{\beta}}=\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{2n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\beta}}=2^{\beta}n^{\frac{\beta}{\alpha}-1}.$$

当$n\to\infty$时，最后的式子趋于无穷.

520. 用$\varphi_{\alpha}(x)$表上面例子中的函数，它满足α阶的里普希茨条件. 但

① 如果，点x_1或x_2之一等于s，那末，证明是类似的.

不满足任何 $\beta>\alpha$ 阶的里普希茨条件. 此外, 用 σ_n 表级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$ 的和数.

现在, 我们构造要求的函数 $f(x)$. 为此, 在线段 $[0, 1]$ 上给出点序列:

$$0=\xi_2<\xi_3<\xi_4<\cdots<\xi_n<\cdots$$

(这里 $\xi_n\to1$, 当 $n\to\infty$ 时), 在每个线段 $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ 上用下面的方法给出 $f(x)$:

a) 如果 n 是偶数, 那末, 命 $f(x)=\frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}\left(\frac{\sigma_n\cdot(x-\xi_n)}{\xi_{n+1}-\xi_n}\right)$ (这个函数可以由 $\varphi_{\frac{1}{n}}(x)$ 按纵坐标轴压缩 n 倍, 按横坐标轴压缩 $\frac{\sigma_n}{\xi_{n+1}-\xi_n}$ 倍, 且沿横坐标向右移动一个量 ξ_n 而得到).

б) 如果 n 是奇数, 那末, 命 $f(x)=\frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}\left(\frac{\sigma_n\cdot(\xi_{n+1}-x)}{\xi_{n+1}-\xi_n}\right)$.

这样一来, 函数 $f(x)$ 在半闭区间 $[0, 1)$ 上处处有定义; 再用等式 $f(1)=0$ 补充在点 $x=1$ 的定义后, 我们得到的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上处处有定义而且连续. 函数 $f(x)$ 在这个闭区间上有无界变差(函数 $f(x)$ 的略图, 参看图 50).

这个函数在线段 $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ 上满足 $\frac{1}{n}$ 阶的里普希茨条件, 但不满足 $\frac{1}{n-1}$ 阶的里普希茨条件; 因而, 在整个线段 $[0, 1]$ 上不满足任意 $\alpha>0$ 阶的里普希茨条件.

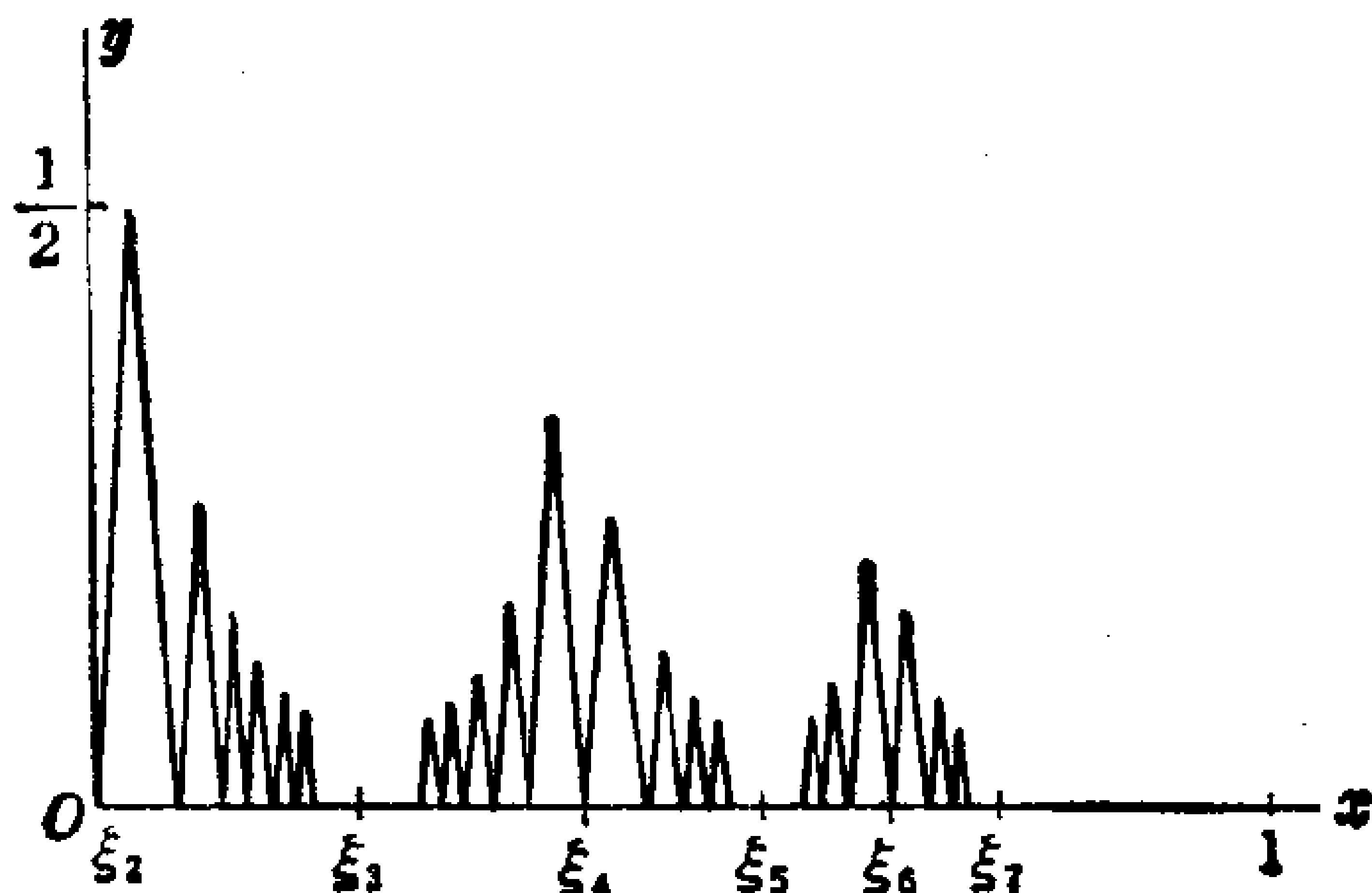


图 50

521. 考察线段 $[a, b]$ 的任意分法:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

估计函数 $\frac{1}{f(x)}$ 的改变量的模数之和(对选出的分法):

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right|=\sum_{i=1}^{n}\frac{|f(x_i)-f(x_{i-1})|}{|f(x_i)|\cdot|f(x_{i-1})|}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{|f(x_i)-f(x_{i-1})|}{c^2},$$

因为，$|f(x_i)|\geqslant c$，$|f(x_{i-1})|\geqslant c$．不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right|\leqslant\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

对线段的任意分法都成立．对这个不等式的左、右两部分取上确界（关于所有可能的分法）得到：

$$\bigvee_a^b\frac{1}{f(x)}\leqslant\frac{1}{c^2}\bigvee_a^b f(x),$$

由此得出函数$\frac{1}{f(x)}$的变差的有界性．

522. a) 充分性．设函数 $F(x)$ 在点 x_0 连续；我们证明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性．设 $h>0$；那末，

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant\bigvee_{x_0}^{x_0+h}f(x);$$

而
$$\bigvee_{x_0}^{x_0+h}f(x)=\bigvee_a^{x_0+h}f(x)-\bigvee_a^{x_0}f(x)=F(x_0+h)-F(x_0).$$

即是说，$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)$．由函数 $F(x)$ 在点 x_0 的连续性得出，当 $h\to+0$ 时，$f(x_0+h)-f(x_0)\to0$，即是，函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续．类似地可以证明 $f(x)$ 在点 x_0 左连续．

б) 必要性．设 $f(x)$ 在点 $x_0\in[a,b]$ 连续．我们证明函数 $F(x)$ 在这点的右连续性．取任一 $\varepsilon>0$，我们证明存在这样的 $h>0$，当 $x_0<\xi<x_0+h$ 时，$|F(\xi)-F(x_0)|<\varepsilon$．为此，构造线段 $[x_0,b]$ 的这样一分法：$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，使其函数的改变量的模数之和同变差 $\bigvee\limits_a^b f(x)$ 之差不大于 $\varepsilon/2$；同时，总可以认为点 x_1 是如此接近于 x_0，以致于 $|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon/2$（如果点 x_1 离 x_0 太远，我们可以增加一个分点到诸分点中，使之充分接近于 x_0；增加一个分点到诸分点中只可能使和数增加）．于是，

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|>\bigvee_{x_0}^{b}f(x)-\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$\overset{b}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f(x) < \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} = |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) -$$

$$- f(x_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \overset{b}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}} f(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \overset{b}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}} f(x) + \varepsilon.$$

所以

$$\overset{b}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f(x) - \overset{b}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}} f(x) < \varepsilon,$$

即是

$$\overset{x_1}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f(x) < \varepsilon, \text{由此得出} \overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) - \overset{x_0}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) < \varepsilon.$$

现记 $x_1 = x_0 + h$, 得出

$$F(x_0 + h) - F(x_0) < \varepsilon.$$

因为, $F(x)$是增函数, 那末, 由此得出, 对任意 ξ, $x_0 < \xi < x_0 + h$, 有

$$|F(\xi) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

由此得出函数 $F(x)$ 在点 x_0 的右连续性.

函数 $F(x)$的左连续性可以类似地证明.

523. 这个问题中的论断是上面问题中已证明了的定理的直接结果.

524. 用下面的方法表函数 $f(x) = \cos^2 x$ 为增函数之差的形式:

$$f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) - \varphi(x),$$

这里,

$$\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) - f(x),$$

此地

$$\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = \begin{cases} 1 - \cos^2 x, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1 + \cos^2 x, & \text{当 } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - 2\cos^2 x, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{当 } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(参看图 51).

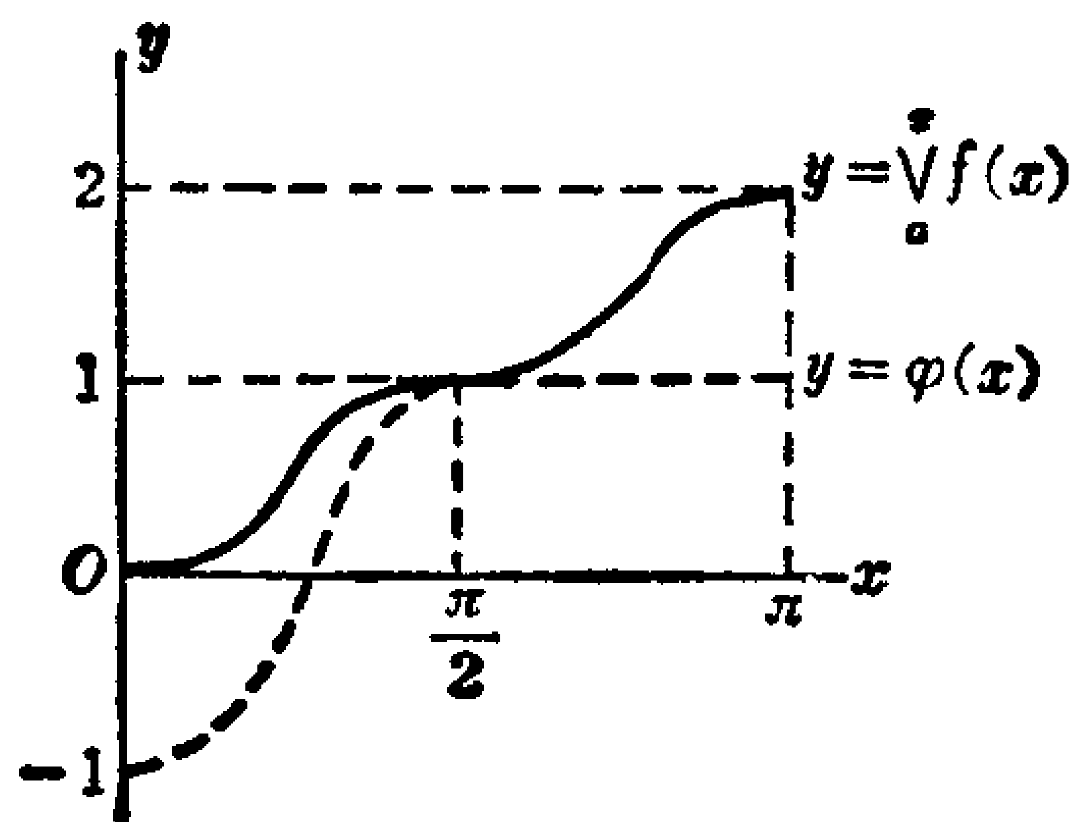


图 51

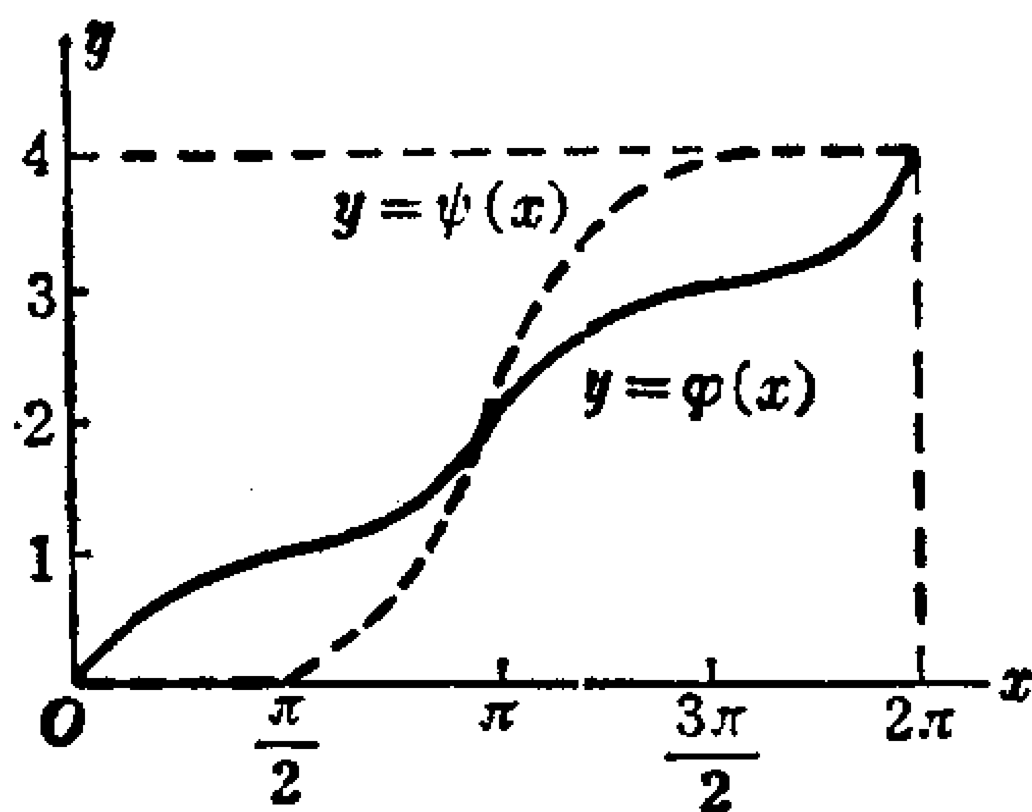


图 52

525. $\sin x=\varphi(x)-\psi(x)$，这里，

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 当\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 2-\sin x, & 当\ \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi,\\ 4+\sin x, & 当\ \dfrac{3}{2}\pi<x\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & 当\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 2-2\sin x, & 当\ \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi,\\ 4, & 当\ \dfrac{3}{2}\pi<x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

（参看图 52）．

526. $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，这里，

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & 当\ 0\leqslant x<1,\\ 2, & 当\ x=1,\\ 3, & 当\ 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}2x^2, & 当\ 0\leqslant x<1,\\ 2, & 当\ 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

（参看图 53）．

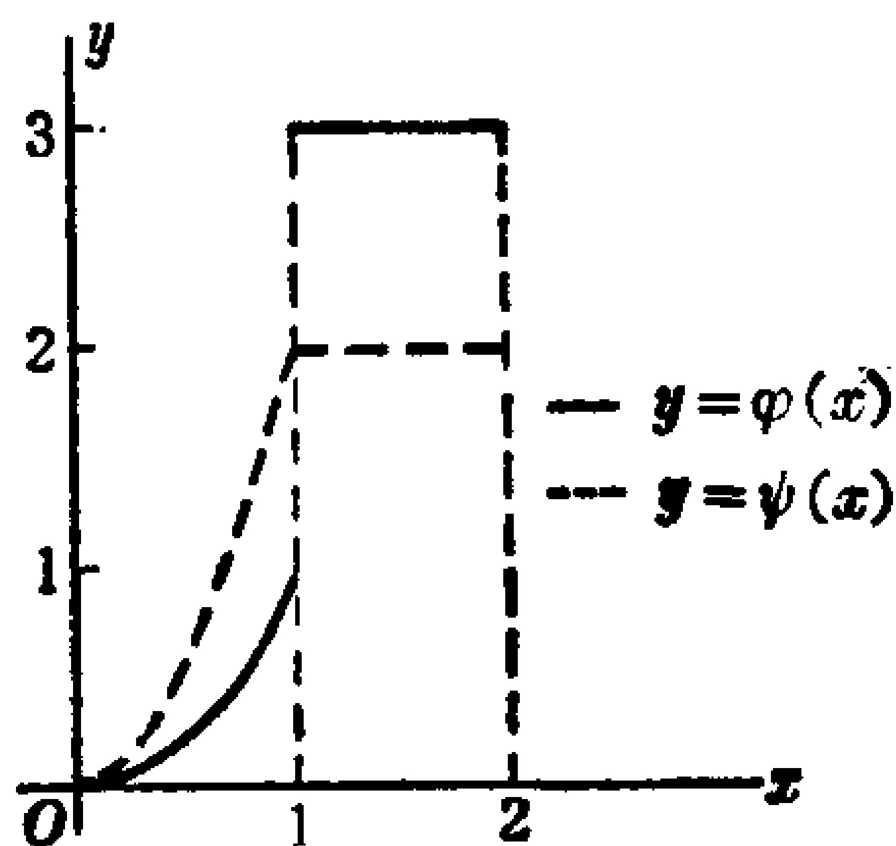


图 53

527. 在整个线段[0, 2]上函数的变差：$\overset{2}{\underset{0}{V}}f(x)=7$，在线段[0, 1]和[1, 2]上的变差：$\overset{1}{\underset{0}{V}}f(x)=5$，$\overset{2}{\underset{1}{V}}f(x)=2$．用下面的方法可以表函数

$f(x)$为单调函数之差的形式:

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x),$$

这里,

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, \text{当 } 0\leqslant x<1,\\ 5, \quad \text{当 } x=1,\\ x+5, \text{当 } 1<x\leqslant 2,\end{cases} \qquad \psi(x)=\begin{cases}0, \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, \text{当 } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

528. 从$|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|$(对任意数$\alpha$和$\beta$)得出这个结论. 所以, 在任意分法下有:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant\bigvee_a^b f(x).$$

因而, 函数$|f(x)|$有有界变差, 而且,

$$\bigvee_a^b|f(x)|\leqslant\bigvee_a^b f(x).$$

529. 不正确. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{当 } x \text{ 为无理数},\\ 1, \quad \text{当 } x \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

那末, $|f(x)|\equiv 1$, 因而$|f(x)|$在任意线段$[a, b]$上有有界变差, 但$f(x)$在同一线段上是无界变差函数.

530. 结论为真. 如果, $f(x)$是连续函数, $|f(x)|$是$[a, b]$上的有界变差函数, 那末, $f(x)$在$[a, b]$上也是有界变差函数. 我们证明这个结论.

取线段$[a, b]$的任意一分法, 并用σ表对这个分法函数$f(x)$的改变量的模数之和. 如果, 在这个分法的某一线段(x_{k-1}, x_k)上, 函数$f(x)$不变号, 那末, 函数在这个线段上的改变量按绝对值等于模函数的改变量. 如果, 在线段(x_{k-1}, x_k)上函数变号, 那末, 根据连续性, 函数$f(x)$在某一点ζ_k $(x_{k-1}<\zeta_k<x_k)$为零. 因为, 在线段(x_{k-1}, ζ_k)和(ζ_k, x_k)之每一个上, 函数的改变量按绝对值等于它的模函数的改变量, 所以,

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant|f(x_k)-f(\zeta_k)|+|f(\zeta_k)-f(x_{k-1})|\\&=\big||f(x_k)|-|f(\zeta_k)|\big|+\big||f(\zeta_k)|-|f(x_{k-1})|\big|.\end{aligned}$$

于是, 对给定的分法, 函数$f(x)$的改变量的模数之和σ不超过对某一分法(就是上面那些点ζ_k加到诸分点中得到的分法)函数$|f(x)|$的改变量的模数之和σ^*. 而σ^*又不大于函数$|f(x)|$的变差(按条件, $|f(x)|$是有界变差函

数）. 所以，$\sigma \leqslant \sigma^* \leqslant \bigvee_a^b |f|$. 于是，对线段$[a, b]$的任意分法，和数$\sigma$不超过$\bigvee_a^b |f|$；因而，$f(x)$是有界变差函数，而且，

$$\bigvee_a^b f \leqslant \bigvee_a^b |f|.$$

注. 从上一题的解中已得出$\bigvee_a^b |f| \leqslant \bigvee_a^b f(x)$，将此不等式同上面得到的不等式比较可知，对连续函数$f(x)$恒有等式：$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^b |f|$.

531. a) 必要性. 设$f(x)$是$[a, b]$上的有界变差函数；函数$\varphi(x) = \bigvee_a^x f$是$[a, b]$上的增函数；显然，对任意$h>0$，它满足所给的不等式，因为，

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \bigvee_x^{x+h} f = \bigvee_a^{x+h} f - \bigvee_a^x f = \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

б) 充分性. 设$f(x)$是$[a, b]$上给定的函数，$\varphi(x)$是$[a, b]$上这样的增函数，使对任意的$x \in [a, b]$和任意的$h>0$（使$x+h \in [a, b]$）满足不等式：

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

为了证明$f(x)$是有界变差函数，我们用点$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$划分线段$[a, b]$，并估计$f(x)$的改变量的模数之和：

$$\sigma = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^n [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] = \varphi(b) - \varphi(a).$$

于是，上述之和数在线段$[a, b]$的任意分法下不超过数$\varphi(b) - \varphi(a)$；因而，$f(x)$是有界变差函数，而且，

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

532. 这条曲线的可度长性从函数

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$$

在线段$[0, 1]$上有有界变差得出来. 这个函数有有界变差的证明与506题的

解法相同.

533. 这条曲线的非可度长性从所给函数在[0, 1]上没有有界变差得出来；这个函数变差的无界性，可利用解 507 题的方法证明.

534. 皮亚诺曲线是不可度长的(事实上，因为，它填满了整个正方形，所以，在正方形中可以作出长度充分大的折线来). 因而，函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 中至少有一个应该是无界变差函数. 从皮亚诺曲线的构造知，这两个函数是完全平等的. 因而，当这些函数中之一有无界变差，而另一个是有界变差的情况不可能出现. 即是说，这两个函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在线段 $0\leqslant t\leqslant 1$ 有无界变差.

535. 当参数 t 取遍从 1 到 0 的值时，在平面上的点 $M(x, y)$，实际上沿连接点 (a, a) 和 (b, b) 的线段运动. 同时，点 M 是沿这条线段进行振动的. 这样一来，由这些参数方程给出的线不是上面说的线段，而是具有无穷多节的(所有一切节都在线段上)折线 $AB_1B_2B_3\cdots C$(参看图 54). 这条折线不是可度长的.

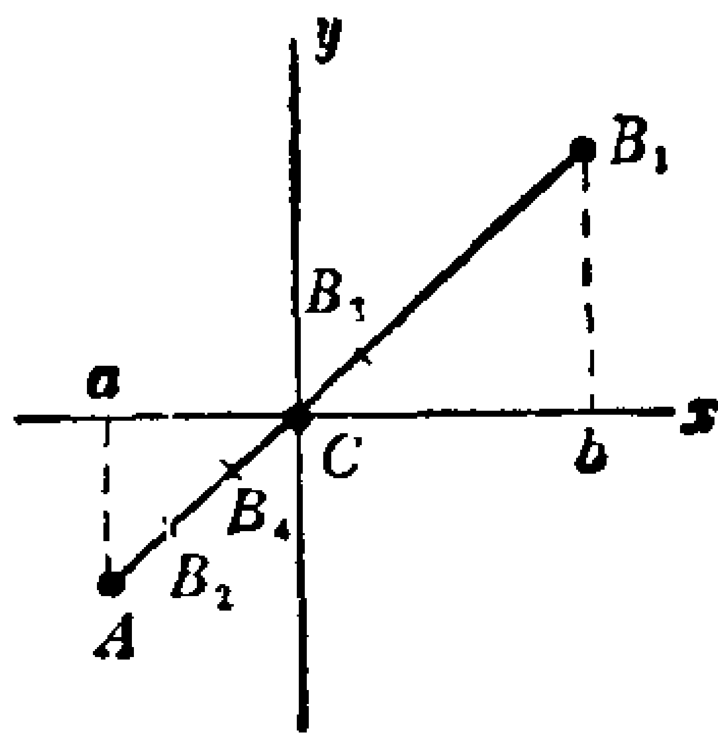


图 54

536. 在[0, 1]上有有界导数的函数 $f(x)$ 是有界变差函数(参看 510 题)；因而，曲线 $y=f(x)$ 是可度长的.

537. 函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 在[0, 1]上有有界变差(参看 510 题)；因而，曲线 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 是可度长的.

第十二章　可测函数·黎曼积分与勒伯格积分

538. 设 a 是任意的数. 容易看出：

$$E([f(x)]^3>a)=E(f(x)>\sqrt[3]{a}).$$

因为，由条件 $f(x)$ 是可测函数，则集 $E(f(x)>\sqrt[3]{a})$ 可测；因而，集 $E[f(x)]^3>a)$ 对任意的 a 也可测，即函数 $[f(x)]^3$ 可测.

539. 不能得出可测性. 例：设

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{在任何不可测集 } A \text{ 上};\\ -1, \text{在 } CA \text{ 上}.\end{cases}$$

函数 $f(x)$ 不可测. 然而函数 $|f(x)|$(它恒等于 1)是可测的.

540. 作收敛于 a 的点列 $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\cdots$，和收敛于 b 的点列 $\beta_1<\beta_2<$

$\beta_3<\cdots$，显然有

$$(a,b)=\bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i,\beta_i].$$

因为，根据条件在任意的$[\alpha_i,\beta_i]$上函数$f(x)$可测，则对于每一数c，点集

$$E_i=[\alpha_i,\beta_i]\cap E(f(x)>c)$$

可测．但是在开区间$(a,\ b)$内使$f(x)>c$的一切点所成集$E(f(x)>c)$等于一切E_i之和：

$$E(f(x)>c)=\bigcup_i E_i.$$

这样，在c为任何数时集$E(f(x)>c)$可测，即$f(x)$在开区间(a,b)上可测．因为闭区间$[a,b]$与开区间$(a,\ b)$只相差一零测度集，则函数$f(x)$也在闭区间$[a,b]$上是可测的．

541. 是可测的．它与函数$\varphi(x)=x^3$只在一个零测度集（康托集的子集）上不相同．这表示函数$f(x)$和$\varphi(x)$等价．但$\varphi(x)$在闭区间$[0,\ 1]$上可测，因而$f(x)$也在这个闭区间上可测．

542. 考虑函数

$$\varphi_n(x)=\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}},$$

它在$\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$上有定义且可测．对所有的$x$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f'(x)$存在．因而在闭区间$\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$上，极限函数$f'(x)$可测．

又因为半闭区间$[a,b)$是闭区间$\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$之和．则$f'(x)$在半闭区间$[a,b)$上可测（如同540题一样，容易证实这一点）．于是$f'(x)$在整个闭区间上可测．

543. 如果$\chi_E(x)$是集E的特征函数，则

当$a<0$时，$E(\chi_E(x)>a)=R$（其中R是全空间）；

当$0\leqslant a<1$时，$E(\chi_E(x)>a)=E$；

当$a\geqslant 1$时，$E(\chi_E(x)>a)=\varnothing$．

由此看出：当E是可测集时，函数$\chi_E(x)$可测，而当E不可测时，函数$\chi_E(x)$也不可测．

544. 用下面的方法来作出函数$f(x)$．设E是直线上具有下述性质的

可测集：对于任意的开区间(α,β)，集$E\cap(\alpha,\beta)$的测度异于零，而且集$CE\cap(\alpha,\beta)$的测度也异于零(在解359题时，已作过这种集的例子)．我们就把所求的函数$f(x)$取为$\chi_E(x)$(集E的特征函数)．它在任一点x_0间断(因为在含有这点的任意区间上，函数的振幅等于1)．如果在测度为零的集上改变这个函数的值，则在任意的区间上，振幅只可能增加．因此，在任意的测度为零的集上，改变这个函数值后，它仍在任意的点上间断．

545. 令$[f(x)]_a^b=\varphi(x)$，显然有

当$c<a$时，$E(\varphi(x)>c)=E$；

当$a\leqslant c<b$时，$E(\varphi(x)>c)=E(f(x)>c)$；

当$c\geqslant b$时，$E(\varphi(x)>c)=\varnothing$．

因为函数$f(x)$是可测的，则集$E(\varphi(x)>c)$对任意的c可测，即函数$\varphi(x)$可测．

546. 设$y=f(x)$是任意函数，积$\chi(x)\cdot f(x)$几乎处处等于零，因此函数$\chi(x)\cdot f(x)$与恒等于零的函数(即一可测函数)等价．这意味着该函数$\chi(x)\cdot f(x)$可测．

547. 每一单调函数是可测的．而任一有界变差函数是两个单调函数之差，因而它也是可测的．

548. 设E_1是Oy轴上的开区间(α,β)，有$(\alpha,\beta)=(-\infty,\beta)\cap(\alpha,+\infty)$．由于函数$f(x)$的可测性，无限区间$(-\infty,\beta)$和$(\alpha,+\infty)$的原像是可测的．又因为两集交的原像等于它们原像之交(参看373题)，则$f^{-1}(\alpha,\beta)=f^{-1}(-\infty,\beta)\cap f^{-1}(\alpha,+\infty)$．因而开区间的原像是可测集．

如果E_1是Oy轴上的任意开集，则它是可数个开区间之和．为了证明$f^{-1}(E_1)$是可测集，需要利用下面的事实，集合和的原像等于原像之和(参看375题)．

如果E_1是闭集，则$E_1=R\setminus E_2$，其中R是Oy轴，而E_2是某个开集．因整个直线的原像是可测集，且开集E_2的原像也是可测的．则它们差的原像也是可测的(参看374题)．

如果E_1是G_δ型或F_σ型集，则E_1的原像也是可测的(类似地证明)．

549. 可测集的原像不一定可测．举出一例来说明这点．

研究康托函数$y=\tau(x)$(它已在494题作出了)．我们已经知道，它在闭区间$E=[0,\ 1]$上是单调连续的，且把它映到Oy轴上整个闭区间$E_1=[0,1]$．同时，康托集$D\subset E$被映成闭区间E_1的一切数所成之集，而集CD被

映成这个闭区间的二进位有理数所成的集.

现在我们构造函数 $\Phi(x)=x+\tau(x)$，它是严格增且连续的. 它把 Ox 轴的闭区间$[0,1]$一对一地映到 Oy 轴的闭区间$[0,2]$. 同时，集 CD 变为测度为 1 的集(因为 CD 的每一开区间变成同样长度的开区间). 因此，集 D 也变成 Oy 轴上闭区间$[0,2]$上的、长度为 1 的闭子集 F(参看图 55 上的函数 $y=\Phi(x)$的略图).

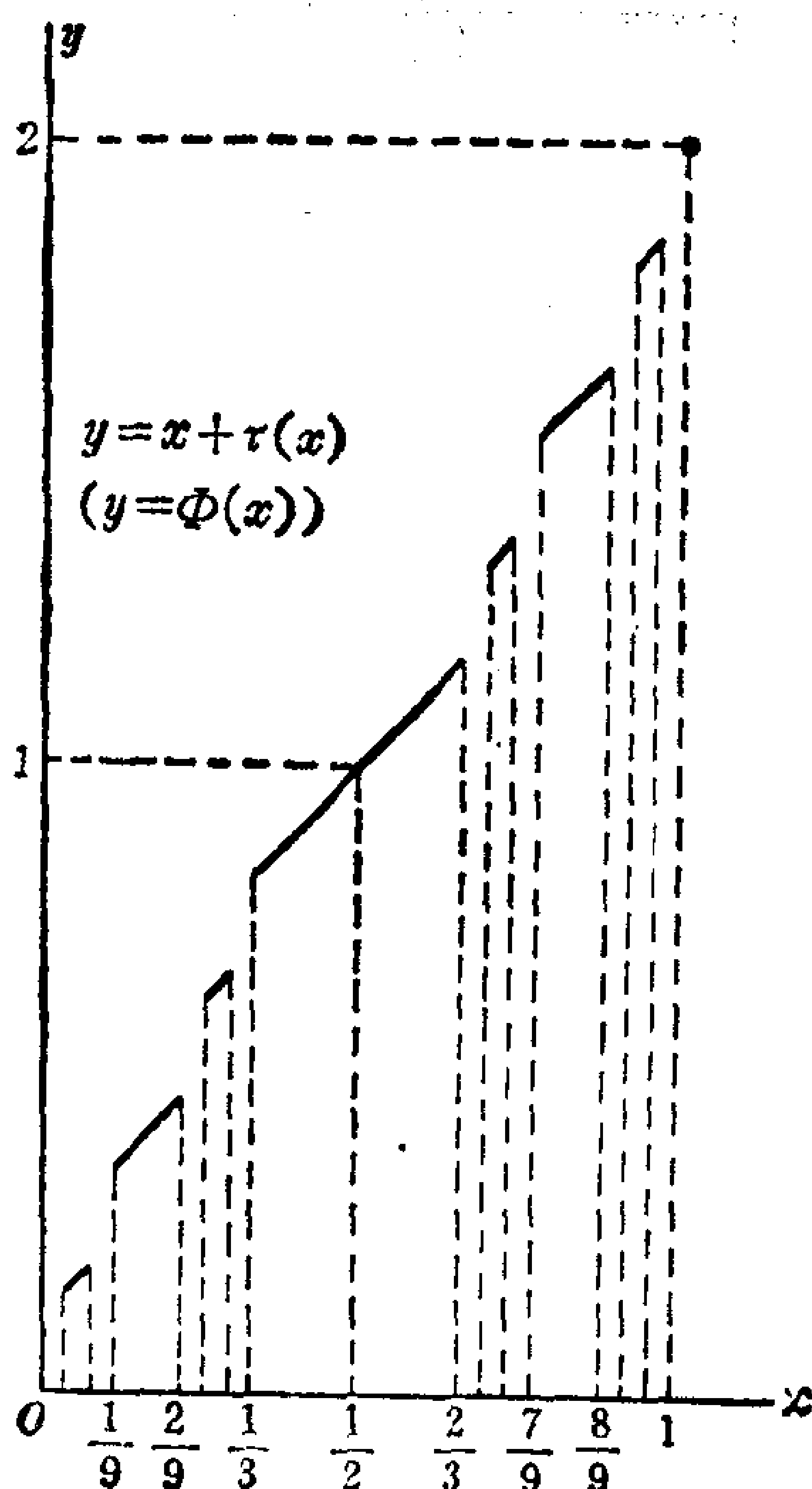


图 55

最后，作函数 $\Phi(x)$的反函数(记为 $x=\varphi(y)$). 它是连续的(因而也是可测的)，并且把闭区间$[0,2]\subset Oy$ 一对一地映到闭区间$[0,1]\subset Ox$ 上. 同时，把集 F(其测度为 1)变为 D(图 56).

集 F(如同每一具有正测度的集一样)含有不可测子集，例如子集 $A\subset F$. 这个子集的像 $\varphi(A)$是康托集的子集(即集 $\varphi(F)$的子集)，但每一个零测度集的子集可测，因此，$B=\varphi(A)$可测. 于是，集 B 可测，然而它的原像 $A=$

$\varphi^{-1}(B)$①不可测.

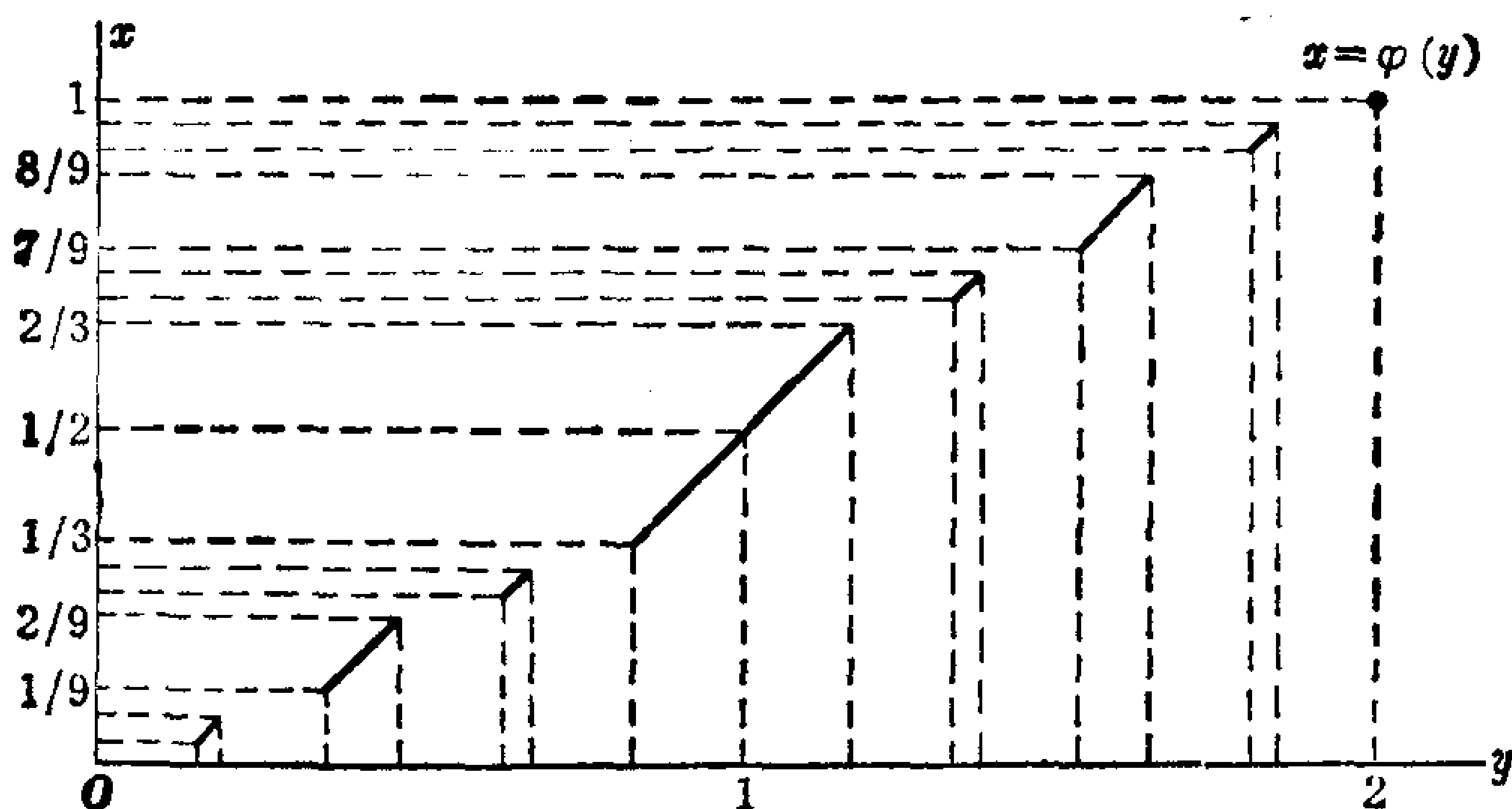


图 56

550. 由函数 $f(x)$ 在 E 上可测和包含于 E 中的集 E_0 可测, 还不能推出集 $f(E_0)$ 的可测性. 用例来说明这一点.

研究函数 $\Phi(x)=x+\tau(x)$, 其中 $\tau(x)$ 是康托函数（参看前题）. 函数 $\Phi(x)$ 把闭区间 $[0,1]\subset Ox$ 变成(一对一连续地)闭区间 $[0,2]\subset Oy$; 并把康托集 $D\subset Ox$ 变成某一子集 $F\subset Oy$, 而且 $mF=1$. 设 A 是集 F 的不可测子集, 而 $B=\Phi^{-1}(A)$ 是集 A 的原像. 于是集 B 可测(因为康托集的测度为零, 而它又是其子集).

于是, B 可测, 而 $A=\Phi(B)$ 不可测. 而实现映射的函数是可测, 甚至连续的.

551. 证明函数 $y=f[\varphi(t)]$ 的可测性. 设 a 为任意的数, 于是, 在 E_1 中使不等式 $y>a$(即 $f(x)>a$)成立的 x 的集是 Ox 轴上某个开集 Γ 和集 E_1 的交②.

现在为了在 Ot 轴上找出使 $y=f[\varphi(t)]>a$ 的点集, 必须找使 $\varphi(t)\in\Gamma\cap E_1$ 成立的一切点集 A; 或者, 一样地, 找出使 $\varphi(t)\in\Gamma$ 的点集, 即找集 Γ 的原像 $\varphi^{-1}(\Gamma)$. 但是, 如果 φ 是可测函数, 而 Γ 是开集, 则 $\varphi^{-1}(\Gamma)$ 可测(参

---

① 由于函数 $x=\varphi(y)$ 的一对一性, 在这个情况下, 由等式 $B=\varphi(A)$ 推出 $A=\varphi^{-1}(B)$(即 A 是集 B 的完全原像).

② 如果在全直线上给出了连续函数 $y=f(x)$, 则在 Oy 轴上每一开集的原像是 Ox 轴上的开集(参看 381 题). 如果函数的定义域(集 E_1)不为全直线 Ox, 则用同样方法容易证明: 开集的原像是集 E_1 同 Ox 轴上某开集 Γ 的公共部分.

看 548 题). 于是, 对于任意的 a, 使 $f[\varphi(t)]>a$ 的 t 所成的集可测, 即是函数 $f[\varphi(t)]$可测.

552. 由函数 $x=\varphi(t)$在 $E=[\alpha,\ \beta]$上连续和 $y=f(x)$是可测函数还不能推出复合函数 $y=f[\varphi(t)]$在 E 上是可测的结论. 例: 设 $x=\varphi(t)$是函数 $t=x+\tau(x)$的反函数, 此处, $\tau(x)$是定义于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的康托函数. 于是 $x=\varphi(t)$为 $0\leqslant t\leqslant 2$ 上连续、在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上取值的函数(图 56 便为 $x=\varphi(t)$的略图). 在解 549 题时已证明了下面的事实: 在这个闭区间上有一可测集 $B(B\subset[0,1]\subset Ox)$, 其原像 $A=\varphi^{-1}(B)$是 Ot 轴上的不可测集.

现在把集 B 的特征函数当作可测函数 $y=f(x)$. 因为集 B 可测, 它也是可测的.

但是, t 的函数 $y=f[\varphi(t)]$不可测. 为了说明这一点, 只要找出使 $y>0$ 的一切 t 而成的集就可以了. 不等式 $y>0$ 等价于 $x\in B$. 而使 $x\in B$ 的 t 所成之集是 A, 即非可测集.

于是, 使 $f[\varphi(t)]>0$ 的所有 t 而成的集 A 不可测, 即是这个函数不可测.

553. 任何在$[a,b]$上的有界变差函数有界, 且在$[a,b]$上至多有可数多个间断点(因而间断点集之测度为零). 这些条件便是使函数在$[a,b]$上黎曼可积的充分条件.

554. 不可积. 如果函数在非空开集 $G\subset[a,b]$上处处间断, 则它的间断点所成集有正测度, 这样的函数在$[a,b]$上不可能是黎曼可积的.

555. 由函数在任意的闭区间$[\alpha,\beta]$$(a<\alpha<\beta<b)$上的黎曼可积性, 还不能推出这个函数在全闭区间$[a,b]$上的可积性. 函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

就可以作为这样的例子.

它在闭区间$[0,1]$上非黎曼可积(由于无界性). 但是它在任意的闭区间$[\alpha,\beta]$$(0<\alpha<\beta<1)$上可积.

556. 如果 $f(x)$在$[a,b]$上有界, 且在任何的闭区间$[\alpha,\beta]$$(a<\alpha<\beta<b)$上黎曼可积, 则它在整个闭区间$[a,b]$上黎曼可积. 我们证明这点.

因为函数在任何的闭区间$[\alpha,\ \beta]$上黎曼可积, 则特别地, 它在闭区间 $\left[a+\dfrac{1}{n},b-\dfrac{1}{n}\right]$$(n=1,2,3\cdots)$上可积. 因而在每一个这样的闭区间上, 间断

点所成的集的测度为零. 用 E_n 表示在 $\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$上函数的间断点所成之集. 于是在$[a, b]$上所有间断点所成之集等于一切 E_n 之和, 也许, 还要加上点 a 和 b(或者它们中的一个). 而又因对于任意的 n, $mE_n=0$, 则 $m\bigcup_n E_n=0$. 把闭区间$[a, b]$的一个或两个端点加到集 $\bigcup_n E_n$ 上, 并不改变这个集的测度. 因此, 在$[a, b]$上函数的一切间断点集的测度为零. 又因为按照条件, 函数在$[a, b]$上有界, 则它在$[a, b]$上黎曼可积.

557. 设函数 $\varphi_n(x)$在闭区间$[a, b]$上黎曼可积, 且序列$\{\varphi_n(x)\}$在这个闭区间上一致收敛于 $f(x)$. 我们证明 $f(x)$在$[a, b]$上可积.

a) 函数 $f(x)$有界. 事实上, 如果序列$\{\varphi_n(x)\}$一致收敛于 $f(x)$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 特别地, 对 $\varepsilon=1$, 能找出这样的 N, 当 $n\geqslant N$ 时, 就有

$$|f(x)-\varphi_n(x)|<1$$

成立. 当 $n=N$ 时, 这个不等式便成为

$$|f(x)-\varphi_N(x)|<1$$

或

$$\varphi_N(x)-1<f(x)<1+\varphi_N(x).$$

因为函数 $\varphi_N(x)-1$ 和 $\varphi_N(x)+1$ 在$[a, b]$上有界, 则函数 $f(x)$也在$[a, b]$上有界.

б) 函数 $f(x)$的间断点所成集的测度为零. 为证明这一点, 我们用 E_n 表示函数 $\varphi_n(x)$的间断点所成之集. 于是 $mE_n=0$. 再用 A 表示集$[a, b]\setminus\bigcup_n E_n$. 集 A 的测度等于 $b-a$.

在每一点 $x_0\in A$, 一切函数 $\varphi_n(x)$是连续的, 于是在点 x_0, 极限函数 $f(x)$也是连续的(由于序列的一致收敛性), 即是函数 $f(x)$只可能在集 $\bigcup_n E_n$ 上间断(也就是只在测度为零的集上).

这样一来, 函数 $f(x)$在$[a, b]$上有界, 它的间断点所成之集的测度又等于零, 因而 $f(x)$在$[a, b]$上黎曼可积.

等式 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx$ 的证明是类似于一致收敛的连续函数序列的等式的证明.

558. 由 $mE=0$ 还不能推出 $\chi_E(x)$黎曼可积. 例: 设 E 是$[0, 1]$上的有理数所成之集, 则 $mE=0$. 但是 $\chi_E(x)$在$[0, 1]$上不可积(这个函数的间断点

所成的集是全闭区间[0, 1]).

559. 从E是在$[a, b]$上的无处稠密集，还不能推出$\chi_E(x)$在$[a, b]$上黎曼可积.

例：设E是闭区间$[0, 1]$上的，其测度等于$\frac{1}{2}$的，无处稠密的完备集. 于是$\chi_E(x)$在集E的全部点上间断，即在正测度集上间断. 因而，函数$\chi_E(x)$在$[0, 1]$上不是黎曼可积的.

560. 从E是无处稠密的零测度集，还不能推出$\chi_E(x)$的黎曼可积性. 例：设F是在闭区间$[0, 1]$上的，测度等于$\frac{1}{2}$的，无处稠密的完备集，且E是一切邻接区间的端点所成的集. 于是，E的测度为零(因E是可数集)，且E无处稠密. 但是特征函数$\chi_E(x)$不仅在集E的点上，而且在F上(即在具有正测度的集上)处处间断. 因而它不是黎曼可积的.

561. 可积. 这可由以下的理由推出. 闭集的一切边界点含于这个集中，因而集E的边界点集的测度等于零. 而特征函数$\chi_E(x)$只是在集E的边界点上间断.

562. 设E是$[a, b]$上的，其闭包是一零测度集. 函数$\chi_E(x)$在集$\bar{E}$的全部点间断，而在余集$[a, b]\setminus\bar{E}$的全部点上连续. 因此，函数$\chi_E(x)$的间断点集的测度为零. 此外，因为这个函数在$[a, b]$上有界，则在这个闭区间上，它是黎曼可积的.

563. 在 397, 398(当$c_n\to 0$), 408 题中给出的函数在$[0, 1]$上黎曼可积，它们全都是有界的. 此外，398 题中(当$c_n\to 0$时)的函数还是连续的. 395 和 397 题中给出函数的间断点所成的集是康托集(即测度为零的集). 408题中的函数的间断点所成的集也是测度为零的集(有理数所成之集).

403 题中的函数在$[0, 1]$上不是黎曼可积的：它虽然有界，但其间断点所成之集(是半闭区间$(0, 1]$)具有正测度.

564. 所有这些函数在闭区间$[0, 1]$上有界可测，因而勒伯格可积. 计算其积分于下：

a) 为了计算 395 题中函数的积分，把积分区域分成不相交的两个集：$[0, 1]=D\cup CD$，其中D是康托集，而CD是它对整个闭区间$[0, 1]$的余集. 利用勒伯格积分的可加性，我们得到

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_D f(x)dx+(L)\int_{CD} f(x)dx.$$

在集D上积分等于零(因$mD=0$)，而在CD上，函数是常数，因此

$$(L)\int_{CD} f(x)dx=2mCD=2\cdot 1=2.$$

因而，

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=0+2=2.$$

6) 为了计算398题(当$c_n\to 0$时)中函数的积分，把积分区域分成可数个两两不相交的集:

$$[0,1]=D\cup(\alpha_1,\beta_1)\cup(\alpha_2,\beta_2)\cup\cdots\cup(\alpha_n,\beta_n)\cup\cdots,$$

其中的D是康托集，而(α_n,β_n)为它的按其长度减小的次序编号的邻接区间，即(α_1,β_1)是长为$\frac{1}{3}$的开区间；(α_2,β_2)和(α_3,β_3)是长为$\frac{1}{3^2}$的开区间；(α_4,β_4)，…，(α_7,β_7)是长为$\frac{1}{3^3}$的开区间，等等。同时，我们把同样长的开区间由左向右编号。利用勒伯格积分的完全可加性，得

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_D f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx.$$

因为$mD=0$，第一个积分为零。其余的积分也容易算出：在每一开区间(α_n,β_n)上函数黎曼可积，因此，

$$(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx=(R)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx.$$

在这种情况下，黎曼积分等于相应三角形的面积(参看图57上函数的图形)。

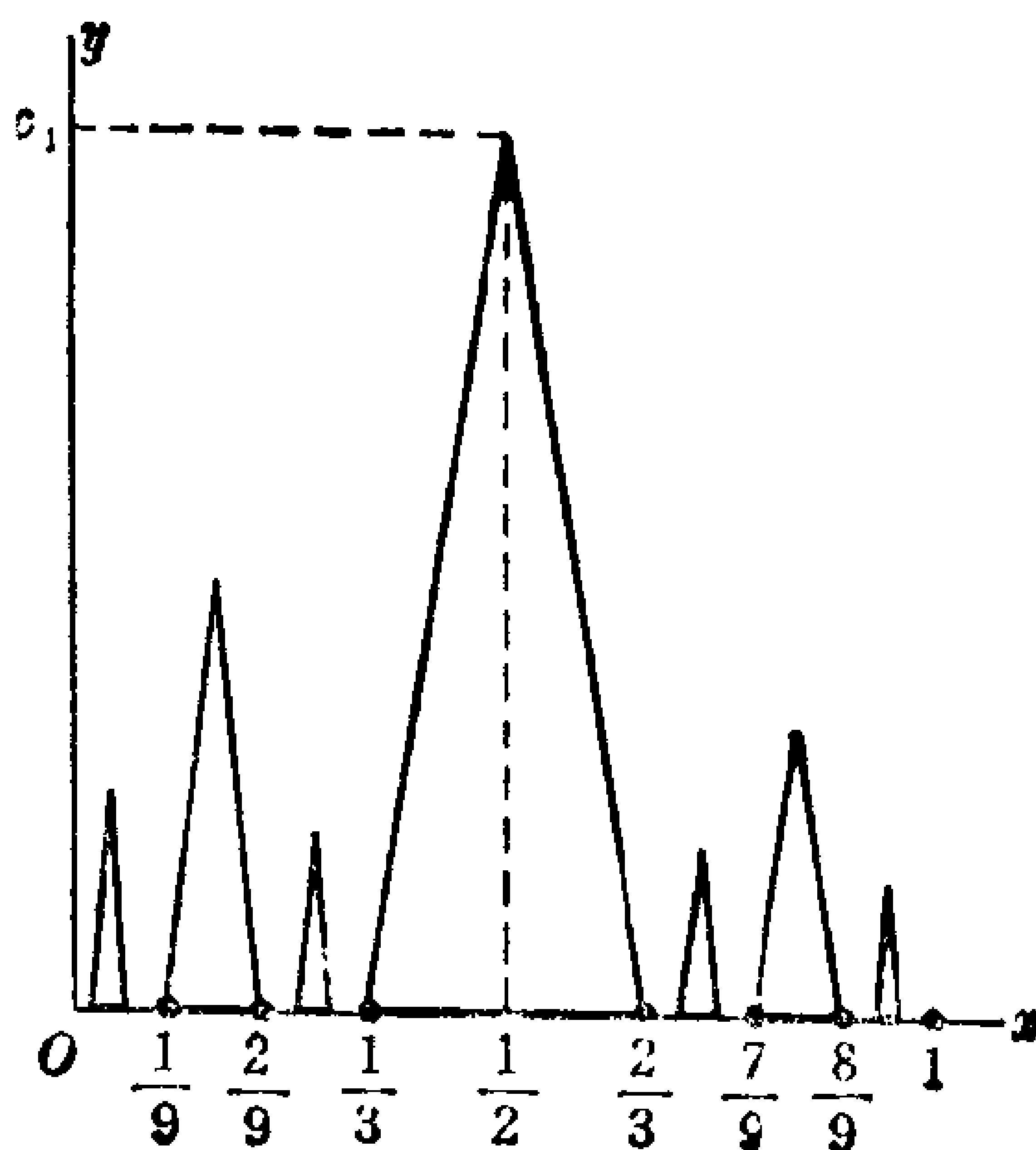


图 57

这样一来，例如：

$$(R)\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x)dx=\frac{c_1\cdot\frac{1}{3}}{2};\qquad (R)\int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x)dx=\frac{c_2\cdot\frac{1}{3^2}}{2};$$

$$(R)\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x)dx=\frac{c_3\cdot\frac{1}{3^2}}{2};\qquad (R)\int_{\alpha_4}^{\beta_4} f(x)dx=\frac{c_4\cdot\frac{1}{3^3}}{2};\ \cdots;$$

$$(R)\int_{\alpha_7}^{\beta_7} f(x)dx=\frac{c_7\cdot\frac{1}{3^3}}{2};\qquad (R)\int_{\alpha_8}^{\beta_8} f(x)dx=\frac{c_8\cdot\frac{1}{3^4}}{2};\ \cdots.$$

求和便得出：

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\frac{c_3}{3^2}+\frac{c_4}{3^3}+\cdots+\frac{c_7}{3^3}+\frac{c_8}{3^4}+\cdots\right].$$

等式右端的级数收敛. 求其和(根据要求的精确度)，便得出所给函数的勒伯格积分.

容易看出，在 398 题中作出的函数不仅当 $c_n\to 0$ 时勒伯格可积，而且当 $\{c_n\}$ 是无论怎样的有界序列时，它也勒伯格可积. 在这种情况下，上面引出的计算积分的公式仍然有效(特别地，对于 397 题中的函数有效).

в) 403 题中的函数 $f(x)$ 等价于函数 $-x^2$，因此，

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_0^1(-x^2)dx=(R)\int_0^1(-x^2)dx=-\frac{1}{3}.$$

г) 408 题中的函数等价于函数 $\varphi(x)\equiv 0$. 因此，

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_0^1 0\cdot dx=0.$$

565. 把积分区域分成两两不相交的集 $D, A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$，其中 D 是康托集，A_k 是一切 k 秩邻接区间之和（即长为 $\frac{1}{3^k}$ 的开区间）. 利用勒伯格积分的完全可加性，得：

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_D f(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}(L)\int_{A_k} f(x)dx.$$

因为 $mD=0$，则 $(L)\int_D f(x)dx=0$. 在每一个其余的集上，函数为常数，因此. 对于任意的号码 k，有：

$$(L)\int_{A_k} f(x)dx=\frac{1}{2^k}mA_k=\frac{1}{2^k}\cdot 2^{k-1}\cdot\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2\cdot 3^k}.$$

因而

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^k}=\frac{1}{4}$$

566. 上题研究过的函数在闭区间[0, 1]上是黎曼可积的. 这是因为在这个闭区间上它有界，且其间断点(即集D中之点)所成之集的测度为零. 这个函数的黎曼积分等于前面已算出的勒伯格积分，因此，

$$(R)\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}.$$

567. 在闭区间[0, 1]上这个函数不是黎曼可积的(除了点$x=1$外，闭区间[0, 1]上的其余点都是它的间断点. 即是它在一正测度集上间断). 因为它有界可测，这个函数却是勒伯格可积的. 为了计算$f(x)$的勒伯格积分，用与它等价的函数$\varphi(x)=x^3$代替被积函数:

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_0^1 \varphi(x)dx=(L)\int_0^1 x^3dx,$$

但函数$\varphi(x)=x^3$在[0, 1]上黎曼可积，因此

$$(L)\int_0^1 x^3dx=(R)\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}.$$

最后便得

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}.$$

568. 函数$\chi_E(x)$有界可测，因而它勒伯格可积. 为了计算其积分，把$[a, b]$分成两个集E和CE(这里$CE=[a, b]\setminus E$). 于是

$$\int_a^\beta \chi_E(x)dx=\int_E \chi_E(x)dx+\int_{CE}\chi_E(x)dx=mE+0=mE.$$

569. 函数$f(x)$不是黎曼可积的(它在一正测度集E上间断)，但为勒伯格可积. 在[0, 1]上计算它的积分:

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_E f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx.$$

在集E上函数等于零，因此$(L)\int_E f(x)dx=0\cdot mE=0$. 在$(\alpha_n, \beta_n)$上函数黎曼可积，因此

$$(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx=(R)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx=\frac{\beta_n-\alpha_n}{2}\cdot 1.$$

故得

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n-\alpha_n}{2}.$$

但$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)$是邻接区间长度之和，它等于集$CE$的测度$\left(即\frac{1}{2}\right)$，最后得到

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}.$$

570. 把E分成两个集：A是使$f(x)\geqslant c$的点所成的集，且B是使$0\leqslant f(x)<c$的点所成的集．于是，因为$(L)\int_B f(x)dx\geqslant 0$(因被积函数非负)，有

$$(L)\int_E f(x)dx=(L)\int_A f(x)dx+(L)\int_B f(x)dx\geqslant(L)\int_A f(x)dx.$$

在集A上有$f(x)\geqslant c$，根据条件，A的测度等于a，因此得

$$(L)\int_E f(x)dx\geqslant(L)\int_A f(x)dx\geqslant c\cdot mA=c\cdot a.$$

571. 在$[0,1]$上所给函数几乎处处等于x^3，因此函数$f(x)$和x^3的勒伯格积分是相等的，于是

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_0^1 x^3dx=(R)\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}.$$

572. 用(α_n,β_n)表示康托集的邻接区间（这些邻接区间按其长度减少的次序来排列)，于是

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_D f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx$$

在D上的积分等于零(因为$mD=0$)．在开区间$(\alpha_n,\ \beta_n)$上的积分可当作黎曼积分来计算(因而，它们中的每一个等于相应半圆的面积)：

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(\beta_n-\alpha_n)^2}{8}.$$

但是对于康托集有：$\beta_1-\alpha_1=\frac{1}{3}$；$\beta_2-\alpha_2=\beta_3-\alpha_3=\frac{1}{3^2}$；$\beta_4-\alpha_4=\cdots=\beta_7-\alpha_7=\frac{1}{3^3}$；$\beta_8-\alpha_8=\cdots=\beta_{15}-\alpha_{15}=\frac{1}{3^4}$；等等．因此

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2^2}{3^6}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^{2n}}+\cdots\right]=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{\pi}{56}$$

573. 把闭区间$[0,1]$表成两个闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$与$\left[\frac{1}{3},1\right]$之和. 在第一个上函数$f(x)$等价于函数$x^3$, 在第二个上它等价于函数$x^2$, 因此

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{3}} x^3dx+\int_{\frac{1}{3}}^1 x^2\,dx=\frac{1}{4\cdot 3^4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}\right)=\frac{35}{108}.$$

574. 集E是闭区间

$$\left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right],\ \left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{4}\right],\ \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2n+1},\ \frac{1}{2n}\right],\ \cdots$$

以及零测度集(0 和 1 两点所成集)之和. 在这些闭区间的每一个上, 函数黎曼可积, 因此,

$$\int_E f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}3x^2dx+\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}}3x^2\,dx+\cdots+\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n}}3x^2\,dx+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{(2n)^3}-\frac{1}{(2n+1)^3}+\cdots$$

这个级数绝对收敛. 它的和等于 0.10(精确到 0.01).

575. $$(L)\ \int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\cos\pi x dx=0.$$

576. 函数$\beta_1(x)$是集E_1的特征函数, 这里E_1表闭区间$[0,1]$的右边的那一半; 函数$\beta_2(x)$是集E_2的特征函数, E_2是闭区间$\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{3}{4},1\right]$之和, 即$E_2=\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$, $\beta_3(x)$是集E_3的特征函数, E_3是如下的闭区间之和:

$$E_3=\left[\frac{1}{8},\ \frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{8},\ \frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{8},\ \frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{7}{8},1\right],$$

等等(参看图 58). 其次, 积$\beta_i(x)\cdot\beta_j(x)$是集$E_i\cap E_j$的特征函数. 特别地, $[\beta_i(x)]^2$是集E_i的特征函数.

容易看出, 所有的集E_i的测度均为$\frac{1}{2}$. 而集$E_i\cap E_j$(当$i\neq j$时)的测度均为$\frac{1}{4}$. 因此, 当$i\neq j$时,

$$\int_0^1\beta_i(x)\cdot\beta_j(x)dx=m(E_i\cap E_j)=\frac{1}{4}.$$

此外

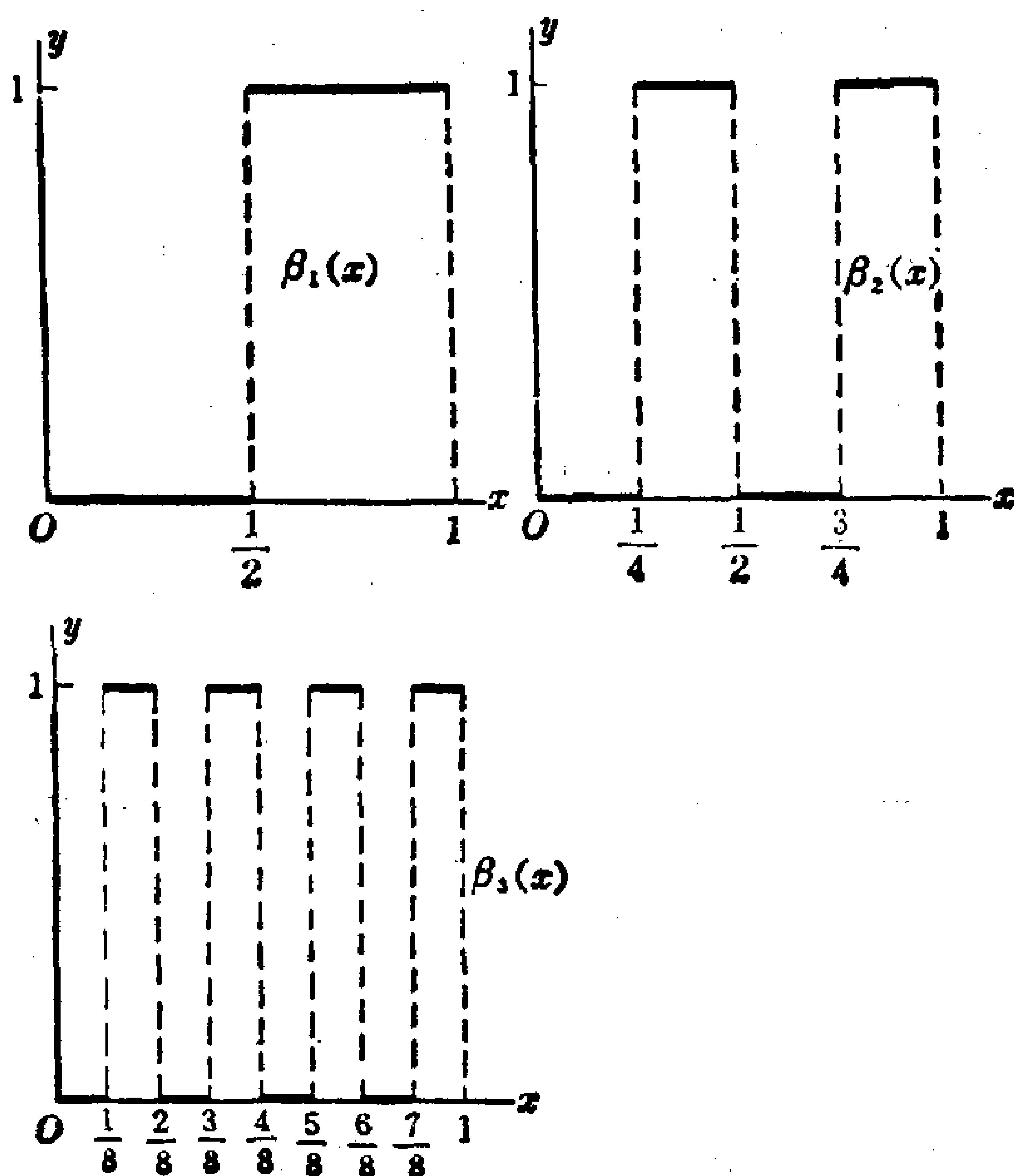


图 58

$$\int_0^1 [\beta_i(x)]^2 dx = mE_i = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \beta_i(x) dx = mE_i = \frac{1}{2}.$$

577. 很容易用上题考察过的函数 $\beta_k(x)$来表示函数 $\varphi_k(x)$: $\varphi_k(x) = 2\beta_k(x)-1$. 因此, 当 $i \neq j$ 时,

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x)dx = \int_0^1 [2\beta_i(x)-1]\cdot[2\beta_j(x)-1]dx = 0.$$

类似地得

$$\int_0^1 [\varphi_i(x)]^2 dx = 1.$$

578. 导函数 $f'(x)$在闭区间$[a, b]$上可测(参看 542 题). 此外, 根据条件, 它也有界, 因而 $f'(x)$在闭区间$[a, b]$上勒伯格可积.

579. 从在 E 上处处有 $f_n(x) \geq 0$ 和当 $n\to\infty$ 时$\int_E f_n(x)dx \to 0$, 还不能得出: 当 $n\to\infty$ 时, 对于一切、或对于几乎一切的 $x\in E$, 有 $f_n(x)\to 0$. 举出

下例.

首先注意: 任何的自然数 n, 可以而且是唯一地表示成 $n=2^k+i$ (这里 $k=0, 1, 2, \cdots; 0\leqslant i<2^k-1$). 现在给出函数序列$\{f_n(x)\}$. 当 $n=2^k+i$ 时, 设

$$f_n(x)=\begin{cases}1, \text{当}\dfrac{i}{2^k}\leqslant x<\dfrac{i+1}{2^k},\\ 0, \text{当它为闭区间}[0,1]\text{中其余的点.}\end{cases}$$

显然有 $\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2^k}$(参看图 59).

因为当 $n\to\infty$ 时, k 也趋于无穷, 则有

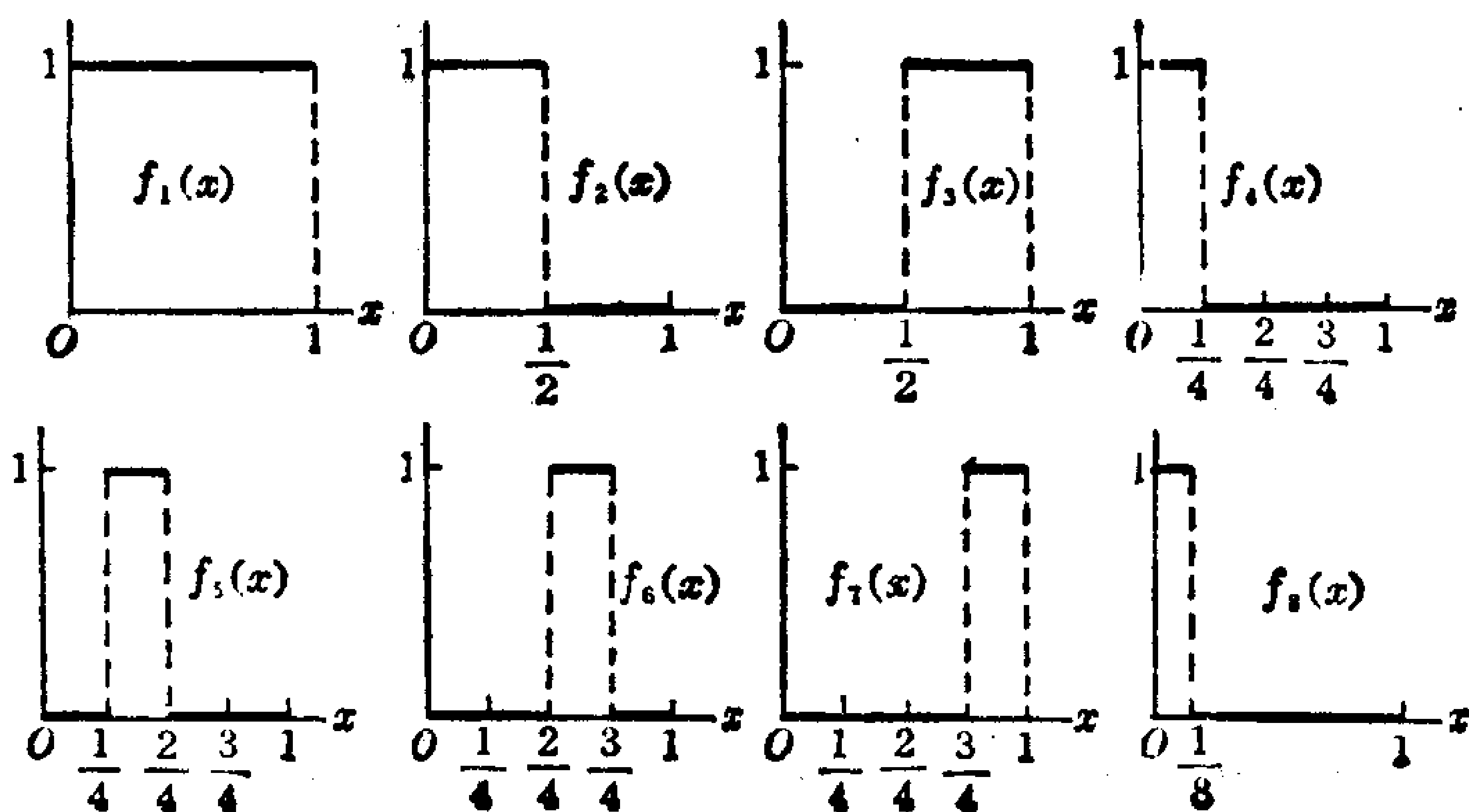


图 59

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0.$$

但是, $\{f_n(x)\}$在闭区间$[0, 1]$的无论哪一点上都不趋于零.

580. 这个结果可以从下面的定理得出: 由 c 确定的函数

$$(L)\int_a^c f(x)dx$$

对几乎所有的 $c\in[a, b]$有导数, 且这个导数几乎处处等于被积函数在点 c 的值. 由等式

$$\int_a^c f(x)dx\equiv 0$$

推出: 等式两端的导数相等, 即几乎对于所有的 $c\in[\alpha, \beta]$ 等式 $f(c)\equiv 0$ 成立.

但是不用关于勒伯格积分的导数的定理，也可以证明这点．下面进行证明．

设对于任意的 $c\in[a, b]$，$\int_a^c f(x)dx=0$．我们将要证明在任意的可测集 $E\subset[a, b]$ 上 $f(x)$ 的积分等于零．

a）对于任意的开区间 $(\alpha, \beta)\subset[a, b]$ 有 $\int_{(\alpha,\beta)} f(x)dx=0$．事实上，

$$\int_{(\alpha,\beta)} f(x)dx=\int_a^\beta f(x)dx-\int_a^\alpha f(x)dx=0.$$

б）对于任意的开集 $G\subset[a, b]$，$f(x)$ 在开集 G 上的积分等于零．这点由下面的事实推出：G 是有限或可数个两两不相交的开区间之和，上面已证明了在每一个开区间上的积分等于零．

в）对于任意的闭集 $F\subset[a, b]$ 有

$$\int_F f(x)dx=0.$$

如果闭集 F 含有闭区间 $[a, b]$ 的两个端点，则此闭集是整个闭区间 $[a, b]$ 与某个开集 $G\subset[a, b]$ 之差．由此推出这个结果（因为在闭区间 $[a, b]$ 和开集 G 上的积分均等于零）；如果闭集只含闭区间 $[a, b]$ 的一个端点，或者两个都不含，则把一个或两个点加入 F 中，并不改变在此集上的积分，因而在此情况下

$$\int_F f(x)dx=0.$$

г）在任意的 F_σ 型集 M 上的积分等于零．事实上，如果 M 是 F_σ 型的集，则 $M=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_k\cup\cdots$，其中的 F_k 是闭集．不失一般性，可以认为 $F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_k\subset\cdots$（参看 409 题解的开头处）．于是，采用下面的方法，M 可以表成两两不相交的集之和：

$$M=F_1\cup(F_2\setminus F_1)\cup(F_3\setminus F_2)\cup\cdots\cup(F_{k+1}\setminus F_k)\cup\cdots \tag{1}$$

在闭集 F_1 上的积分等于零．又因

$$\int_{F_{k+1}\setminus F_k} f(x)dx=\int_{F_{k+1}} f(x)dx-\int_{F_k} f(x)dx=0.$$

即在集 $F_{k+1}\setminus F_k$ 上的积分也等于零．

利用勒伯格积分的完全可加性和(1)式，我们得出

$$\int_M f(x)dx=0.$$

д）在任意的可测集 $E\subset[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 的积分等于零．这个结论由以下推出：对于任一可测集 E，存在这样一个包含在 E 中的 F_σ 型集 A，使

$m(E\setminus A)=0$. 于是有 $E=A\cup(E\setminus A)$ 和

$$\int_E f(x)dx=\int_A f(x)dx+\int_{E\setminus A} f(x)dx.$$

因为右端第一项为零（由于 A 是 F_σ 型集），第二项也为零（由于 $E\setminus A$ 是零测度集），因而

$$\int_E f(x)dx=0.$$

现研究满足不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的所有的点而成的集 $E_+\subset[a,b]$，它是可测的，因而 $\int_{E_+} f(x)dx=0$. 但是，当一非负函数在某集上的积分为零时，则此函数在这个集上几乎处处等于零. 因而，在集 E_+ 上几乎处处有 $f(x)=0$，即 $f(x)>0$ 只在一个零测度集上成立.

如果研究闭区间 $[a,b]$ 上使 $f(x)\leqslant 0$ 的点所成的集 E_-，类似地可以证明 $f(x)<0$ 只在一个测度为零的集上成立.

因而，在闭区间 $[a,b]$ 上几乎处处有 $f(x)=0$.

581. 为了计算函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ 的积分，用数 $t>1$ 去切它（参看图60），得

$$[f(x)]_t=\begin{cases} t\ , & \text{当 } 1<x<1+\frac{1}{t^3}; \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & \text{当 } 1+\frac{1}{t^3}\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

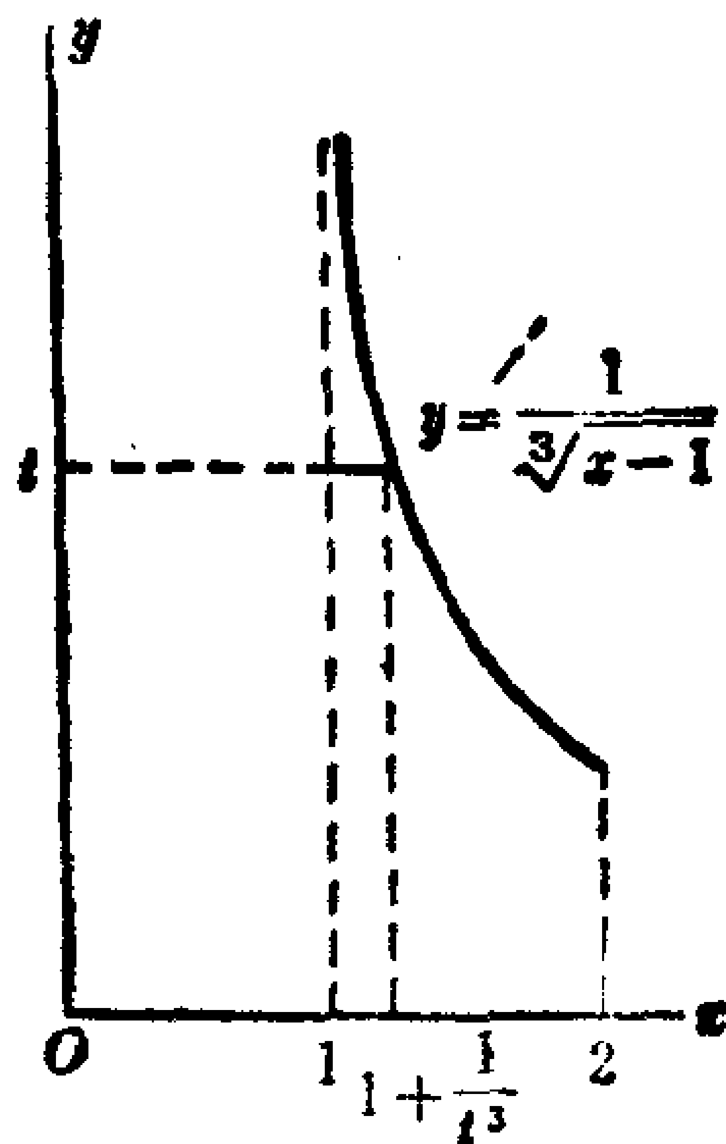


图 60

计算切断函数的积分：

$$(L)\int_{[1,2]}[f(x)]_t dx=\int_1^{1+\frac{1}{t^3}} t\,dx+\int_{1+\frac{1}{t^3}}^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$=t\left(1+\frac{1}{t^3}\right)-t+\frac{3}{2}-\frac{3}{2t^2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2t^2}.$$

为了计算 $f(x)$ 的积分，令 $t\to+\infty$，求切断函数积分的极限：

$$(L)\int_{[1,2]} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2t^2}\right)=\frac{3}{2}.$$

582. 类似于上题的计算，求得

$$(L)\int_{[0,1]}\frac{1}{x^2}dx=+\infty.$$

因而，在闭区间 $[0,1]$ 上函数 $\frac{1}{x^2}$ 是不可和的.

583. 在整个闭区间[0, 1]上，函数 $f(x)$ 等价于函数 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. 因而

$$(L)\quad \int_{[0,1]} f(x)dx=(L)\int_{[0,1]}\varphi(x)dx=(L)\int_{[0,1]}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

由计算知道，后一积分等于 $\frac{3}{2}$. 因而

$$(L)\int_{[0,1]} f(x)\,dx=\frac{3}{2}.$$

584. 这里 $f(x)$ 等价于函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$. 因而，$(L)\int_{[0,1]} f(x)dx$ $=(L)\int_{[0,1]}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$. 后一积分容易算出来，它等于2. 因此

$$(L)\int_{[0,1]} f(x)dx=2.$$

585. 如果 $f(x)$ 在集 E 上有界可测，则在此集上 $[f(x)]^{10}$ 和 $|f(x)|$ 也是有界可测，因而它们均可积. 函数 $\frac{1}{f(x)}$ 可能是无界的，而无界函数可能是不可积的. 例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $E=[0, 1]$ 上有界可测，然而函数 $\frac{1}{x^2}$ 在这个闭区间上无界，且不可积(参看582题).

586. 用数 $t>0$ 去切函数 $f(x)$，求得

$$[f(x)]_t=\begin{cases}0, & \text{当 } x\in D,\\ k, & \text{当 } x\in E_k\,(1\leqslant k\leqslant n),\\ t, & \text{当 } x\in M_n.\end{cases}$$

其中 E_k 是 k 秩邻接区间之和 $\left(\text{显然 } mE_k=\frac{2^{k-1}}{3^k}\right)$，$n$ 是数 t 的整数部分，而 M_n 是秩大于 n 的一切邻接区间之和(集 M_n 的测度等于 $\frac{2^n}{3^n}$).

计算切断函数的积分：

$$\int_0^1 [f(x)]_t\,dx=\int_D [f(x)]_t\,dx+\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} k\,dx+\int_{M_n} t\,dx$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot 2^{k-1}}{3^k}+t\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

为了计算 $f(x)$ 的积分，需要求当 $t\to+\infty$ 时，切断函数积分的极限. 注意：当 $t\to+\infty$ 时，$n\to+\infty$. 同时，$t\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant(n+1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 因为当

$n\to+\infty$ 时，后一表示式的极限等于零，则当 $t\to+\infty$ 时，$t\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\to0$，因而

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^1 [f(x)]_t dx=\lim_{\substack{t\to\infty\\ n\to\infty}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot2^{k-1}}{3^k}\right)+\lim_{t\to\infty}\left[t\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot2^{k-1}}{3^k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

用下面的方法很容易求出上式后一级数的和. 用 $\varphi(q)$ 表示一般级数 $\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}$ 的和：

$$\varphi(q)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}.$$

这是一个幂级数，因此，在其收敛区间内的任意闭区间上可积分. 特别地，在开区间 $(0,q)$ 上（其中 $|q|<1$）可积分. 因此

$$\int_0^q \varphi(q)dq=\sum_{k=1}^{\infty}q^k,\quad \text{即}\ \int_0^q\varphi(q)dq=\frac{1}{1-q}$$

现在，在等式两端求导，便得 $\varphi(q)=\frac{1}{(1-q)^2}$. 因而

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

特别地

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=9.$$

最后便得

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}\cdot9=3$$

587. 根据条件，$E_k=E(k\leqslant f(x)<k+1)$. 显然，不等式

$$k\cdot mE_k\leqslant\int_{E_k}f(x)dx\leqslant(k+1)mE_k \tag{1}$$

成立. 现在来证明非负函数 $f(x)$ 可和的必要充分条件是级数 $\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot mE_k$ 收

敛.

a) 必要性. 设级数$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot mE_k$发散. 对于任意的自然数 N, 下面的不等式成立:

$$\int_E [f(x)]_N dx \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{E_k} f(x)dx \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} k\cdot mE_k.$$

因为$\sum_{k=0}^{N-1} k\cdot mE_k$(当 $N\to\infty$ 时)趋于无穷,则当 $N\to\infty$ 时,就有$\int_E [f(x)]_N dx \to\infty$. 因而函数 $f(x)$在集 E 上不可和.

б) 充分性. 设级数$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot mE_k$ 收敛, 则当 $N\to\infty$ 时, 级数的余项$\sum_{k=N}^{\infty} k\cdot mE_k$ 趋于零.

等式

$$\int_E [f(x)]_N dx = N\cdot m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{E_k} f(x)dx$$

是成立的. 注意到不等式(1), 得

$$\int_E [f(x)]_N dx \leqslant N\cdot m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) + \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)mE_k. \tag{2}$$

当 $N\to\infty$ 时, 不等式右端第一项趋于零(因为 $N\cdot m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) = N\cdot \sum_{k=N}^{\infty} mE_k \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} k\cdot mE_k$, 而当 $N\to\infty$ 时, $\sum_{k=N}^{\infty} k\cdot mE_k \to 0$). 其次, 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)mE_k$ 收敛(因为, 级数可分成两个收敛级数: $\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot mE_k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} mE_k$).

因此, 不等式(2)右端的表示式趋于一有限数$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)mE_k$. 于是积分$\int_E [f(x)]_N dx$ 当 $N\to\infty$ 时有有限极限(因为, 当N增加时, 它增加; 而且我们已证明了它又是有界的). 因此函数 $f(x)$在集E上可和.

588. 利用前题记号容易证实: 对于任意的自然数 k, 等式

$$\widetilde{E}_k = E_k \cup E_{k+1} \cup E_{k+2} \cup \cdots$$

成立. 由此(因为当 $i \neq j$ 时, $E_i \cap E_j = \varnothing$)

$$m\widetilde{E}_k = mE_k + mE_{k+1} + mE_{k+2} + \cdots;$$

特别地, 当$k=1, 2, \cdots$ 时, 有

$$\begin{aligned} m\widetilde{E}_1 &= mE_1 + mE_2 + mE_3 + \cdots + mE_k + \cdots \\ m\widetilde{E}_2 &= \qquad\ \ mE_2 + mE_3 + \cdots + mE_k + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m\widetilde{E}_k &= \qquad\qquad\qquad\qquad mE_k + mE_{k+1} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

把这些等式相加并整理得

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\widetilde{E}_k = mE_1 + 2mE_2 + 3mE_3 + \cdots + k \cdot mE_k + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k.$$

于是, 级数 $\sum_k m\widetilde{E}_k$ 的收敛性等价于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k$ 的收敛性. 而由前题的结果推出: 非负函数 $f(x)$可和的充分必要条件是级数 $\sum_k m\widetilde{E}_k$ 收敛.

589. 设 $f(x)$是有界函数, 且 $\sup\limits_{[0,a]} f(x) = M$; $\inf\limits_{[0,a]} f(x) = m$. 用任意的方法把 Oy 轴上的闭区间$[m, M]$分成子区间. 容易看出, 相应于这个分法的、在$[0, a]$上函数 $f(x)$的勒伯格积分和等于在 $\left[0, \frac{a}{k}\right]$ 上 $f(kx)$的勒伯格积分和(在闭区间$[m, M]$的同一分法下). 由积分和的等式推出积分等式. 因而对于任意有界可测函数 $f(x)$, 等式

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{k}} f(kx)dx \tag{1}$$

成立.

如果 $f(x)$在$[0, a]$上无界, 非负, 则我们先写出切断函数$[f(x)]_t$和$[f(kx)]_t$的等式(1), 然后令 $t \to \infty$ 求极限.

如果 $f(x)$是在$[0, a]$上无界、变号的函数, 则我们先写出函数 $f_+(x)$和$f_-(x)$的等式(1). 然后从 $f_+(x)$的等式(1)中逐项减去关于 $f_-(x)$的等式.

590. 首先注意, 如果对某一个 $k>0$ 函数$\frac{1}{x}\cos\frac{k}{x}$在$[0, 1]$上不可和, 则

在这个闭区间上对于任何其它的$k>0$,它也不可和(由上题结果推出此点).

我们证明$\frac{1}{x}\cos\frac{2}{x}$是不可和的. 假定它可和, 则函数 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$也就是可和的. 于是函数$\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}$也是可和的, 这是因为$\left|\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|$. 因为$\cos\frac{2}{x}=\cos^2\frac{1}{x}-\sin^2\frac{1}{x}$, 因而$\frac{1}{x}\sin^2\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{2}{x}$, 于是由此还推出函数$\frac{1}{x}\sin^2\frac{1}{x}$也是可和的. 而由函数$\frac{1}{x}\sin^2\frac{1}{x}$与$\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}$的可和性, 又推出了它们和的可和性, 即函数$\frac{1}{x}$的可和性, 这是不正确的.

因此, 假定函数 $\frac{1}{x}\cos\frac{2}{x}$可和就导致矛盾. 即表明函数$\frac{1}{x}\cos\frac{2}{x}$不可和, 于是对于任何形如$\frac{1}{x}\cos\frac{k}{x}$的函数也是不可和的.

591. 设$\chi_{E_1}(x), \chi_{E_2}(x), \cdots, \chi_{E_n}(x)$分别是集$E_1, E_2, \cdots E_n$的特征函数. 考虑这些函数和的积分$I$:

$$I=\int_a^b [\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)+\cdots+\chi_{E_n}(x)]\,dx$$

$$=\int_a^b \chi_{E_1}(x)dx+\cdots+\int_a^b \chi_{E_n}(x)dx=mE_1+\cdots+mE_n. \quad (1)$$

现在指出, 在任何的一点$x\in[a, b]$有 $\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)+\cdots+\chi_{E_n}(x)\geqslant q$ (因为任一点$x\in[a, b]$至少属于已给出集E_i中的q个, 因此至少有q项在点x等于1), 因此

$$I\geqslant\int_a^b q\,dx=q(b-a). \quad (2)$$

比较(1), (2)两式, 得

$$mE_1+mE_2+\cdots+mE_n\geqslant q(b-a). \quad (3)$$

假定对一切i有$mE_i<\frac{q(b-a)}{n}$, 由此就推出$\sum_{i=1}^{n} mE_i<q(b-a)$, 这与(3)式矛盾. 因而至少对诸$E_i$中的一个, 有

$$mE_i\geqslant\frac{q(b-a)}{n}.$$

592. 这个断言不正确. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}2^n, & 当\ 2^{-n}<x<2^{-n+1},\\ 0, & 在闭区间[0,1]中其余的点.\end{cases}$$

这里当 $n\to\infty$ 时，对于任意的点 $x\in[0,1]$，$f_n(x)\to 0$，但是 $\int_0^1 f_n(x)dx=1$（对于任意的 n）. 因此，当 $n\to\infty$ 时，$\int_0^1 f_n(x)dx$ 不趋于零.

但是，我们指出，如果在题目的条件中再加上"一切 $f_n(x)$ 囿于同一数 C"（即 $|f_n(x)|\leqslant C$ 对于所有的 $x\in E$ 和所有的号码 n 成立），则当 $n\to\infty$ 时，$\int_E f_n(x)dx\to 0$.

593. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且勒伯格可和. 根据条件，点 a 是函数 $f(x)$ 的唯一间断点. 我们证明

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

这里等式右端的积分是勒伯格积分. 为了证明此点，我们研究差

$$\int_a^b f(x)dx-\int_t^b f(x)dx \tag{2}$$

我们将证明，当 t 充分接近 a 时，差的绝对值可以任意地小. 设 $\varepsilon>0$ 是任意的正数，N 是使 $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b [f(x)]_N dx<\frac{\varepsilon}{2}$ 成立的数. 用下面的方法变换差(2)：

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_t^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^t f(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_a^t (f(x)-[f(x)]_N)dx+\int_a^t [f(x)]_N dx\right|; \tag{3}$$

在等式右端的每一个积分号下，被积函数非负. 因此可去掉绝对值号. 现在分别估计每一个积分：

$$\int_a^t (f(x)-[f(x)]_N)dx\leqslant\int_a^b (f(x)-[f(x)]_N)dx$$

$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b [f(x)]_N dx<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\int_a^t [f(x)]_N dx\leqslant N(t-a).$$

但是，当

$$0<t-a<\frac{\varepsilon}{2N} \tag{4}$$

时，$N(t-a)<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是，根据等式(3)，对于满足条件(4)的所有 t，有

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_t^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

成立．由此推出 $\lim\limits_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$．因而对于非负可和函数，柯西反常积分等于勒伯格积分．

如果可和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取不同符号的函数值，且在 $[a, b]$ 上(除了点 a 外)处处连续．则我们将其表成以下的形式

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x).$$

两个函数 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 在半闭区间 $(a, b]$ 上非负、连续．因此

$$\begin{aligned}(L)\int_a^b f(x)dx&=(L)\int_a^b f_+(x)dx-(L)\int_a^b f_-(x)dx\\&=\lim_{t\to a+0}\int_t^b f_+(x)dx-\lim_{t\to a+0}\int_t^b f_-(x)dx=\lim\int_t^b f(x)dx.\end{aligned}$$

于是，对于任意(其中包括变号的)可和函数 $f(x)$，且除了点 a 外，在 $[a, b]$ 上处处连续，其柯西反常积分与勒伯格积分相等．

594．在闭区间 $[a, b]$ 上，由函数 $f(x)$ 的柯西反常积分的存在，还不能推出这个函数在 $[a, b]$ 上可和．下面就是一例．设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & x\in(0, 1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

这个函数在 $[0, 1]$ 上柯西可积．事实上：

$$\begin{aligned}(C)\int_0^1\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx&=\lim_{t\to+0}\int_t^1\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to+0}\int_{\frac{1}{t}}^1 z\cdot\cos z\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz\\&=\lim_{t\to+0}\int_1^{\frac{1}{t}}\frac{\cos z}{z}dz=\int_1^{+\infty}\frac{\cos z}{z}dz.\end{aligned}$$

而反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos z}{z}dz$ 在分析中已经知道它是存在的．

至于说到在区间 $[0, 1]$ 上函数 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 的勒伯格积分，从 590 题的解中知道，它是不存在的．

595．如果函数 $f(x)$ 在集 E 上勒伯格可和，则在此集上这个函数的正部与负部：

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2};\qquad f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2},$$

也是可和的．

因为 $f_+(x)\geqslant 0$, $-f_-(x)\leqslant 0$, $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$, 则对于任意 $t>0$, 等式

$$[f(x)]_{-t}^{t}=[f_+(x)]_{-t}^{t}+[-f_-(x)]_{-t}^{t}$$

是正确的. 由此得

$$\int_E [f(x)]_{-t}^{t}dx=\int_E [f_+(x)]_{-t}^{t}dx+\int_E [-f_-(x)]_{-t}^{t}dx,$$

当 $t\to\infty$ 时, 等式右边的积分趋于相应的勒伯格积分(因为函数 $[f_+(x)]_{-t}^{t}$ 是用数 t 切取的, 非负函数 $f_+(x)$ 的切断函数, 而函数 $[-f_-(x)]_{-t}^{t}$ 有类似的意义). 于是

$$\lim_{t\to\infty}\int_E [f(x)]_{-t}^{t}dx=\lim_{t\to\infty}\int_E [f_+(x)]_{-t}^{t}dx+\lim_{t\to\infty}\int_E [-f_-(x)]_{-t}^{t}dx$$

$$=\int_E f_+(x)dx+\int_E [-f_-(x)]dx=\int_E [f_+(x)-f_-(x)]dx=(L)\int_E f(x)dx.$$

因而, 函数 $f(x)$ 为 Q- 可积, 且它的 Q-积分等于勒伯格积分.

596. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 就可以作为例子. 在 $(-1, 1)$ 上它是 Q-可积的, 且它的 Q-积分等于零, 但这个函数不是勒伯格可和的.

597. 这个结论从包含在 612 题中的更一般的命题推出.

598. 对于任意的 $t>0$, 在闭区间 $[-a, a]$ 上给出的任何奇函数 $f(x)$, 等式 $\int_{-a}^{a}[f(x)]_{-t}^{t}dx=0$ 成立. 因此, 当 $t\to+\infty$ 时, 等式两端的极限仍相等, 由此推出, 在闭区间 $[-a, a]$ 上函数 $f(x)$ 的 Q- 积分存在且等于零.

599. 不正确. 例如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $E=[-1, 1]$ 上 Q-可积, 但在 $E_1=(0, 1]$ 上非 Q- 可积. 如果它在 $(0, 1]$ 上 Q- 可积, 则由其在此集上的非负性, 它也是勒伯格可和(参看 597 题). 如我们所知, 这是不正确的.

600. 这个命题正确. 当 $c=0$ 时, 显然正确. 当 $c>0$ 时, 我们来验证它(至于 $c<0$ 时, 可类似验证).

设 $f(x)$ 是在 E 上可测, 且 Q-可积的. 我们证明函数 $cf(x)$ 在 E 上也是 Q-可积的. 容易验证, 对任意 $t>0$ 和任意的 $x\in E$, 等式

$$[cf(x)]_{-t}^{t}=c[f(x)]_{-\frac{t}{c}}^{\frac{t}{c}}$$

是成立的. 由此得

$$\int_E [cf(x)]_{-t}^{t}dx=c\int_E [f(x)]_{-\frac{t}{c}}^{\frac{t}{c}}dx.$$

令 $t\to\infty$，在这个等式两端求极限，我们得到

$$(Q)\int_E cf(x)dx=c\cdot(Q)\int_E f(x)dx.$$

601. 这个命题不正确. 下面便是一例. 设

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{在闭区间}[-1,2]\text{的其余点上.}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{当 } 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{在闭区间}[-1,2]\text{的其余点上.}\end{cases}$$

函数 $f(x)$和 $g(x)$在闭区间$[-1,2]$上的 Q-积分都存在，且均为零. 但是，这些函数之和，即函数

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x^2}, & \text{当 } -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{当 } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

的 Q-积分不存在. 为了证实和的 Q-积分不存在，我们计算$[f(x)+g(x)]_{-t}^{t}$的积分:

$$\int_{-1}^{2}[f(x)+g(x)]_{-t}^{t}dx=\int_{-1}^{-\sqrt{\frac{2}{t}}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx+\int_{-\sqrt{\frac{2}{t}}}^{0}(-t)dx$$

$$+\int_0^{\sqrt{\frac{1}{t}}}tdx+\int_{\sqrt{\frac{1}{t}}}^{1}\frac{1}{x^2}dx+\int_1^{1+\sqrt{\frac{1}{t}}}tdx+\int_{1+\sqrt{\frac{1}{t}}}^{2}\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$=\sqrt{t}\,(4-2\sqrt{2}).$$

当 $t\to+\infty$ 时，最后的表示式趋于无穷. 因此，当 $t\to+\infty$ 时，$\int_{-1}^{2}[f(x)+g(x)]_{-t}^{t}dx$ 没有有限极限. 即是函数 $f(x)+g(x)$在闭区间$[-1,2]$上非 Q-可积.

602. 这个命题也不正确. 用例来指出这点. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{当 } -1\leqslant x<0 \text{ 和 } 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{在闭区间}[-1,2]\text{的其余的点.}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{当 } -1\leqslant x<0,\\ \frac{1}{x-1}, & \text{当 } 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{在闭区间}[-1,2]\text{的其余的点}\end{cases}$$

那末，
$$(Q)\int_{-1}^{2} f(x)dx=0,\quad (Q)\int_{-1}^{2} g(x)dx=0,$$
$$(Q)\int_{-1}^{2}[f(x)+g(x)]dx=2\ln 2$$

(这里计算后一积分的方法，是类似于上一题中积分之计算法). 于是在闭区间$[-1,2]$上函数$f(x)$, $g(x)$和$f(x)+g(x)$中的每一个都是Q-可积的，但是函数和的Q-积分并不等于每项Q-积分之和.

603. 设$f(x)$是在集E上勒伯格可和的函数，于是$f_+(x)$和$f_-(x)$也是可和的. 因为$f_+(x)\geqslant 0$, $-f_-(x)\leqslant 0$, 且$f(x)=f_+(x)+(-f_-(x))$，则对于任意的$t>0$,等式
$$[f(x)]_{-at}^{bt}=[f_+(x)]_{-at}^{bt}+[-f_-(x)]_{-at}^{bt}$$
是正确的. 由此
$$\int_E [f(x)]_{-at}^{bt}dx=\int_E [f_+(x)]_{-at}^{bt}dx+\int_E [-f_-(x)]_{-at}^{bt}dx.$$
函数$f_+(x)$和$f_-(x)$都是非负的,因此
$$[f_+(x)]_{-at}^{bt}=[f_+(x)]_{bt},$$
$$[-f_-(x)]_{-at}^{bt}=-[f_-(x)]_{-bt}^{at}=-[f_-(x)]_{at}.$$
因而,
$$\lim_{t\to\infty}\int_E [f(x)]_{-at}^{bt}dx=\lim_{t\to\infty}\int_E [f_+(x)]_{bt}dx-\lim_{t\to\infty}\int_E [f_-(x)]_{at}dx$$
$$=\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx=(L)\int_E f(x)dx.$$

我们已经知道,如果$f(x)$勒伯格可和,那末,函数$f_+(x)$和$f_-(x)$也是可和的.

于是证明了,当$t\to\infty$时,积分$\int_E [f(x)]_{-at}^{bt}dx$的极限存在,且它既不依赖于$a>0$,又不依赖于$b>0$. 这就表示函数$f(x)$为$A$-可积，且它的$A$-积分等于勒伯格积分.

604. 我们认为 $b>a$($b<a$ 的情形是相似的).

只是在集 $E(f(x)>at)$ 上, 函数 $[f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at}$ 才异于零, 且在这个集的每一点上, 它满足不等式:

$$0\leqslant[f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at}\leqslant bt-at. \qquad (1)$$

此外, 在集 $E(f(x)>bt)$(图 61 上简略地表示了这个集)的所有点上它等于 $bt-at$. 所以我们可以估计这个积分的上下界.

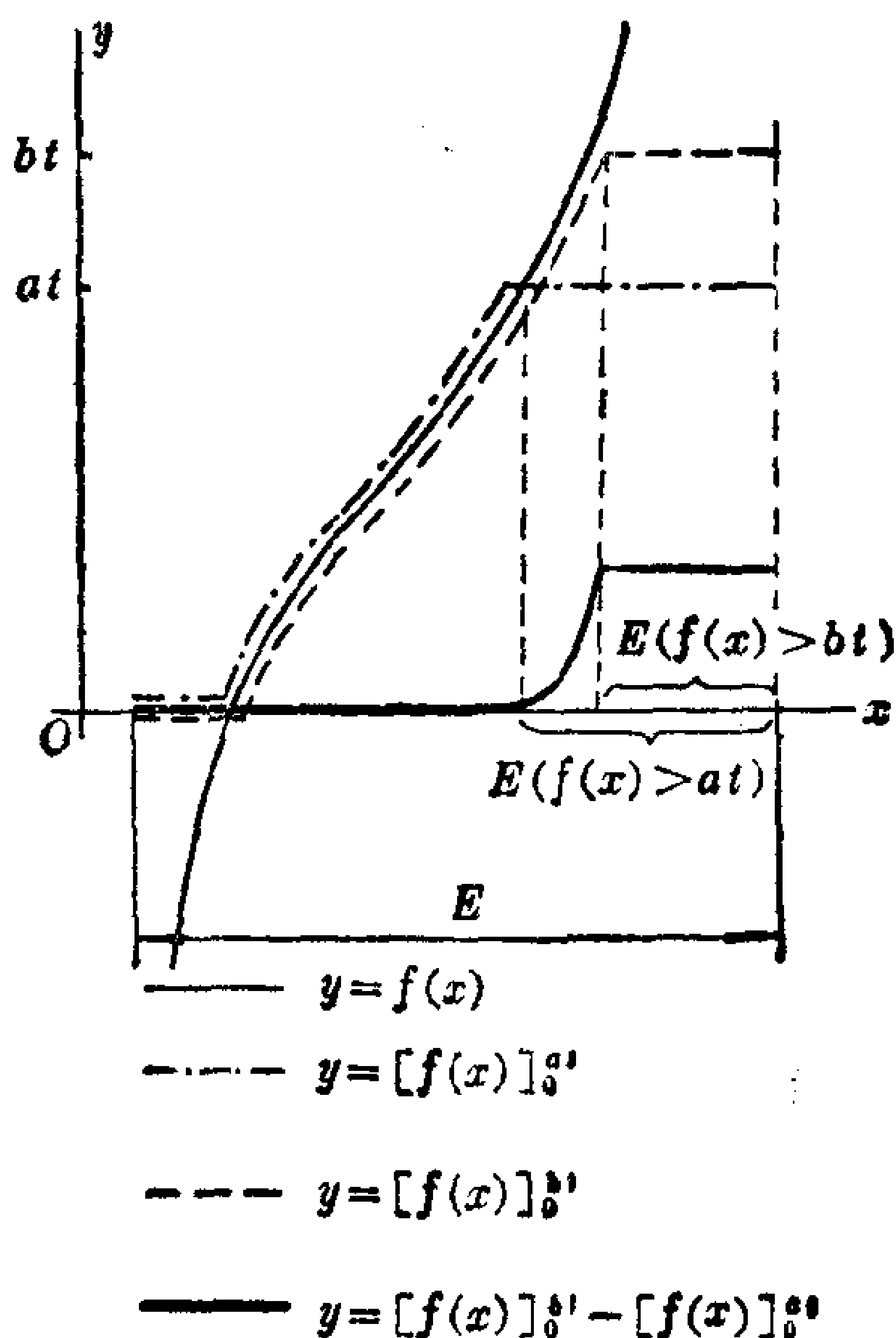


图 61

a) 估计上界. 由不等式(1)推出

$$0\leqslant\int_E([f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at})dx=\int_{E(f(x)>at)}([f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at})dx$$
$$\leqslant(b-a)t\cdot mE(f(x)>at).$$

б) 估计下界. 由函数在集 $E(f(x)>bt)$ 上是常量, 且处处等于 $(b-a)t$, 而在集 E 其余的点上又非负推出

$$\int_E([f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at})dx\geqslant\int_{E(f(x)>bt)}([f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at})dx$$
$$=(b-a)t\cdot mE(f(x)>bt)\geqslant 0.$$

现在, 我们假定当 $t\to+\infty$ 时, $t\cdot mE(f(x)>t)\to 0$. 那末, 当 $t\to+\infty$

时，

$$(b-a)t\cdot mE(f(x)>at)=\frac{b-a}{a}at\cdot mE(f(x)>at)\to 0.$$

在这种情况下，由 a）中证明了的不等式推出

$$\lim_{t\to\infty}\int_E([f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at})dx=0.$$

如果我们假定当 $t\to+\infty$ 时，$\int_E([f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at})dx\to 0$，那末由 б）中已证明了的不等式，立即推出：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{b-a}{b}\cdot bt\cdot mE(f(x)>bt)=0.$$

用 t 代替 bt，由此得到

$$\lim_{t\to\infty}t\cdot mE(f(x)>t)=0.$$

于是两个论断的等价性被证明了.

605. 充分性. 设$(Q)\int_E f(x)dx$ 存在，且当$t\to+\infty$ 时，$t\cdot mE(f(x)>t)\to 0$. 我们证明 $f(x)$是 A-可积的. 为此，对于任意的 $a>0, b>0$，我们研究函数$[f(x)]_{-at}^{bt}$ 的积分：

$$\int_E[f(x)]_{-at}^{bt}dx=\int_E[f(x)]_{-at}^{at}dx+\int_E\{[f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at}\}dx. \quad (1)$$

当 $t\to+\infty$ 时，等式（1）右边第一项具有有限的极限（由于 Q-积分的存在性）；当 $t\to+\infty$ 时，第二项趋于零（由于前一题的结果）. 因此当 $t\to+\infty$ 时，积分$\int_E[f(x)]_{-at}^{bt}dx$ 的极限存在，且此极限既与 a 无关，又与 b 无关. 即 $f(x)$是 A-可积的.

必要性. 设函数 $f(x)$是 A-可积的. 于是，显然地它也是 Q-可积的，而且它的 A-积分与 Q-积分相等. 为了证明当 $t\to+\infty$时，$t\cdot mE(f(x)>t)\to 0$，我们再次利用等式(1). 在这个等式中令 t 趋于无穷，并考虑到$\int_E[f(x)]_{-at}^{bt}dx$ 和$\int_E[f(x)]_{-at}^{at}dx$，由于函数 $f(x)$的 A-可积性，它们是趋于同一极限. 便得到

$$\lim_{t\to\infty}\int_E\{[f(x)]_0^{bt}-[f(x)]_0^{at}\}dx=0.$$

由此推出 $\lim_{t\to\infty}t\cdot mE(f(x)>t)=0$（参看 604 题）.

606. 要作出一个在某集上 A-可积，但在此集上非勒伯格可和的函数，

先考虑在射线 $1<y<+\infty$ 上给出的函数 $x=\frac{1}{y\ln y}$，在这个射线上它连续、且严格减．因此它有反函数，用 $y=\varphi(x)$ 表示它．显然，函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $0<x<+\infty$ 上有定义、连续且严格减(参看图 62)．

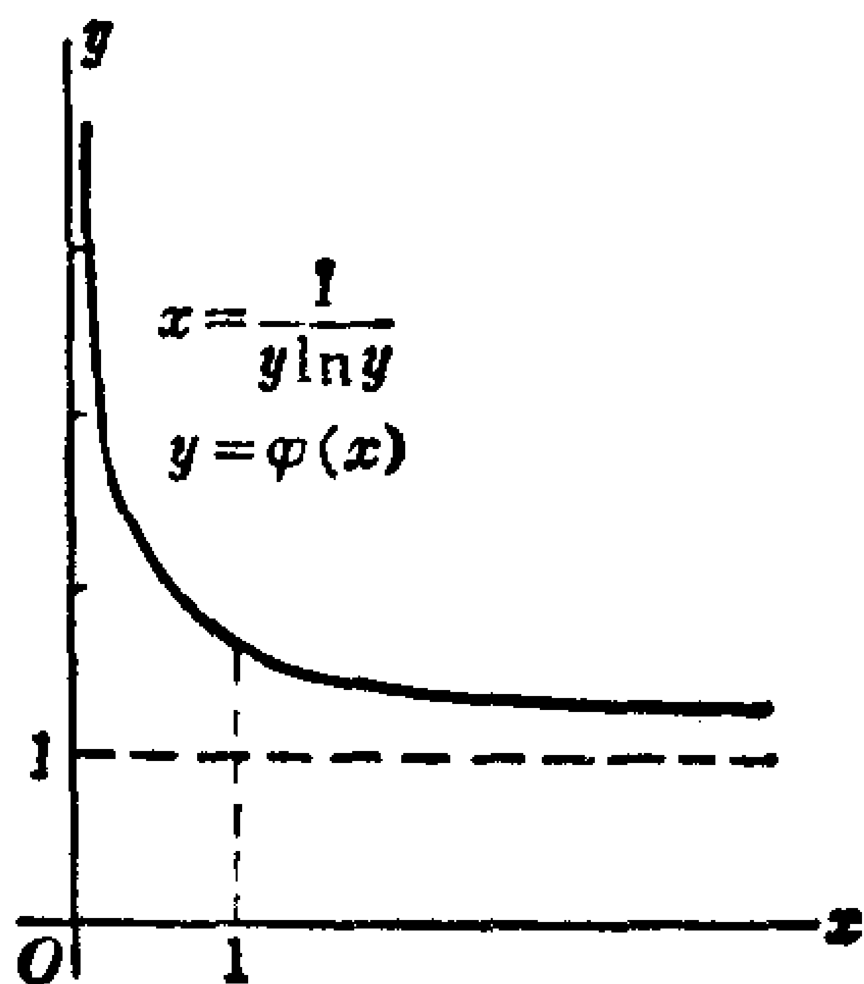


图 62

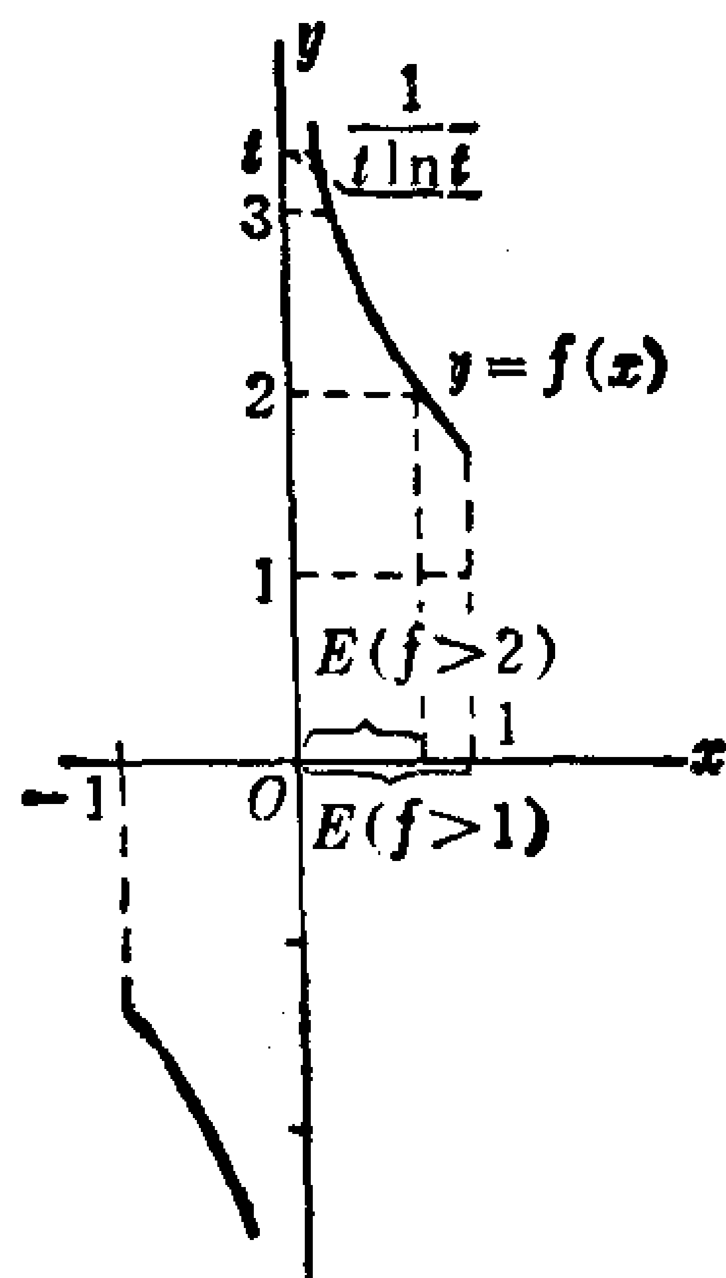


图 63

现在我们把由下面等式:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{在}(0,1)\text{上},\\ -\varphi(-x), & \text{在}(-1,0)\text{上}.\end{cases}$$

(参看图 63)确定的函数 $f(x)$ 取作所求的函数．我们要证明这个函数在 $(-1,1)$ 上 A-可积．事实上，这个函数的 Q- 积分存在(因为在 $(-1,1)$ 上它为奇函数)．此外，对任意的 $t\geqslant2$，有 $mE(f(x)>t)=\frac{1}{t\ln t}$ 成立．因而 $\lim\limits_{t\to\infty}t\cdot mE(f(x)>t)=0$．根据前题结果，由此得出在 $(-1,1)$ 上 $f(x)$ 是 A-可积的．

现在，我们证明这个函数在 $(-1,1)$ 上不是勒伯格可和的．用 $\widetilde{E}_k$ 表示区间 $(0,1)$ 上使 $f(x)\geqslant k$ 的那些点而成的集．显然，$m\widetilde{E}_1=1$，$m\widetilde{E}_k=\frac{1}{k\ln k}$(当 $k\geqslant2$)．级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m\widetilde{E}_k=1+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ 发散．因而在区间 $(0,1)$ 上的非负函数 $f(x)$ 不是勒伯格可和的(参看在 588 题中引出的非负函数可和的判别法则)．类似地验证 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上也不可和．于是这个函数在整个区间 $(-1,1)$ 上也是不可和的．

607．作为 612 题结果的一个特别情形便推出这个命题．

608. 如果在集 E 上函数 A-可积，则它也在集 E 上是 Q- 可积的，并且这函数的两种积分相等.

如果在 E 上函数 Q-可积，则在这个集上它不一定是 A- 可积的. 例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-1, 1)$ 上 Q-可积，但是，在这个区间上它并不是 A-可积的.

609. 这个命题正确. 我们证明它. 设 $c>0$；于是对于任意的 $a>0$, $b>0$, $t>0$, 有下面的等式:

$$[cf(x)]_{-at}^{bt}=c[f(x)]_{-\frac{a}{c}t}^{\frac{b}{c}t};$$

$$\int_E [cf(x)]_{-at}^{bt}dx=c\int_E [f(x)]_{-\frac{a}{c}t}^{\frac{b}{c}t}dx. \qquad (1)$$

如果 $c<0$, 则

$$[cf(x)]_{-at}^{bt}=c[f(x)]_{-\frac{b}{c}t}^{\frac{a}{c}t};$$

$$\int_E [cf(x)]_{-at}^{bt}dx= c\int_E [f(x)]_{-\frac{b}{c}t}^{\frac{a}{c}t}dx \qquad (2)$$

在等式(1), (2)中求极限，得

$$\lim_{t\to\infty}\int_E [cf(x)]_{-at}^{bt}dx=c\cdot(A)\int_E f(x)dx.$$

于是，当 $t\to\infty$ 时，积分 $\int_E [cf(x)]_{-at}^{bt}dx$ 的极限存在. 且它既与 $a>0$ 无关，又与 $b>0$ 无关. 即函数 $cf(x)$ 为 A-可积，且它的 A- 积分按照下面的公式计算:

$$(A)\int_E c\cdot f(x)dx=c\cdot(A)\int_E f(x)dx.$$

在 $c\neq0$ 时，证明了这个等式. 当 $c=0$ 时，它是十分显然的.

610. 如果两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 E 上是 A-可积的，则它们的和在 E 上也是 A-可积的，而且有下面的等式成立:

$$(A)\int_E [f(x)+g(x)]dx=(A)\int_E f(x)dx+(A)\int_E g(x)dx. \qquad (1)$$

为了证明此事，我们须先证明: 对于任意的 $a>0$, $b>0$, $t>0$, 在集 E 上处处有不等式

$$[f(x)]_{-\delta t}^{\gamma t}+[g(x)]_{-\delta t}^{\gamma t}\leqslant[f(x)+g(x)]_{-at}^{bt}\leqslant[f(x)]_{-\alpha t}^{\beta t}+[g(x)]_{-\alpha t}^{t} \qquad (2)$$

成立. 这里

$$\alpha=\min\left(\frac{a}{2}, b\right),\ \beta=\max(a, 2b), \gamma=\min\left(a, \frac{b}{2}\right), \delta=\max(2a, b).$$

为了验证不等式(2), 把集 E 分成六个集 $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$, 在这些集的每一个上, 三个函数 $f(x)$, $g(x)$和 $f(x)+g(x)$ 都保持定号(例如, $E_1=\underset{x}{E}(f\geqslant0, g\geqslant0, f+g\geqslant0)$; $E_2=\underset{x}{E}(f\geqslant0, g<0, f+g\geqslant0)$等等). 然后, 对于每一个 E_i 逐个验证: 当 $x\in E_i$ 时, 不等式(2)成立①.

证明了不等式(2)之后, 在集 E 上逐项积分:

$$\int_E [f(x)]_{-\delta t}^{\gamma t} dx+\int_E [g(x)]_{-\delta t}^{\gamma t} dx\leqslant\int_E [f(x)+g(x)]_{-a t}^{b t} dx$$

$$\leqslant\int_E [f(x)]_{-\alpha t}^{\beta t} dx+\int_E [g(x)]_{-\alpha t}^{\beta t} dx.$$

这个不等式的前后两端趋于 $(A)\int_E f(x)dx+(A)\int_E g(x)dx$. 因而这个不等式中间的项也趋于同一极限. 因为这个极限对于任何的 $a>0$ 和 $b>0$ 都存在, 而且与 a 和 b 都无关, 则函数 $f(x)+g(x)$是 A-可积的, 且

$$(A)\int_E (f(x)+g(x))dx=(A)\int_E f(x)dx+(A)\int_E g(x)dx.$$

611. 这个论断不正确. 在解 606 题时所作的函数 $f(x)$就可作为一例. 它在$(-1, 1)$上为 A-可积, 但在$(0, 1)$上并不 A-可积.

612. 设 $f(x)\geqslant0$ 是非负可测函数, 但在集E上并不勒伯格可和. 我们证明在集E上采用 T-积分, 它仍是不可积的. 由于 T-积分的条件 a), 这个函数的切断函数是 T-可积的, 并且对于任意的 $n>0$, 有等式

$$(T)\int_E [f(x)]_n dx=(L)\int_E [f(x)]_n dx.$$

---

① 在证明不等式(2)时, 应注意以下几点:

a) 如果 $u(x)$和 $v(x)$是非负函数, 则$[u(x)]_{-a}^{b}$ 重合于用数 b 去切函数 $u(x)$而得的切断函数. 对于$[v(x)]_{-a}^{b}$, 情形是类似的. 而对于非负函数的切断函数而言, 不等式

$$[u(x)]_{\frac{b}{2}}+[v(x)]_{\frac{b}{2}}\leqslant[u(x)+v(x)]_b\leqslant[u(x)]_b+[v(x)]_b$$

成立.

б) 如果 $u(x)$是任意的(包括变号的)函数, 则 $-[u(x)]_{-a}^{b}=[-u(x)]_{-b}^{a}$;

в) 如果 $c\leqslant a, d\geqslant b$, 则$[u(x)]_{-a}^{b}\leqslant[u(x)]_{-c}^{d}$.

对于任意的正数 a, b, c, d (其中 $c\leqslant a, d\geqslant b$)关系式 a), б), в)都正确. 这些关系式的详细证明, 以及由它们推出的不等式(2)的证明, 让读者去完成.

成立.

如果说函数 $f(x)$ 在 E 上是 T- 可积的，则因 $f(x)\geqslant[f(x)]_n$，由条件 6) 就推出

$$(T)\int_E f(x)dx\geqslant(T)\int_E[f(x)]_n dx=(L)\int_E[f(x)]_n dx. \qquad (1)$$

但是，当 n 充分地大，$(L)\int_E[f(x)]_n dx$ 可以大于任意的正数(由于函数 $f(x)$ 的不可和性). 因而，$(T)\int_E f(x)dx$ 超过任何的正数(参看(1)式)，这就表示，这个积分不可能等于任何的有限数.

这样一来，如果非负可测函数 $f(x)$ 在有限测度的集 E 上不可和，则在 E 上它也不是 T-可积的. 因而，如果它在 E 上 T-可积，则它在这个集上勒贝格可和总而言之，在非负可测函数类中(给定在具有有限测度的集 E 上的)，T-积.分不比勒伯格积分更广泛.

因为 A-积分和 Q- 积分是 T- 积分的特别情形，于是，对于它们而言，类似的命题(参看上面的 597 和 607 题)是正确的.

613—634 题，建议读者独立地证明包含在这些题中的诸命题.

符 号 表

索 引

一 画

二 画

三 画

四 画

五　画

六　画

七　画

八　画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 五 画

十 六 画

[General Information]
书名=实变函数论的定理与习题集
作者=（苏）Ю·С·鄂强
页数=273
SS号=10236682
出版日期=1981年01月第1版